

Вычислим внутренние усилия в раме (рис. 1) обычным и деформационным расчетом. Исходные данные: $ql = P = 0,7F^{\text{э}}$, $F^{\text{э}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$. Таким образом, мы учтем, что нагрузки в стержнях меньше критических в 1,5 раза. Выполним вначале расчет по недеформированной схеме. Основная система метода перемещений представлена на рис. 2.

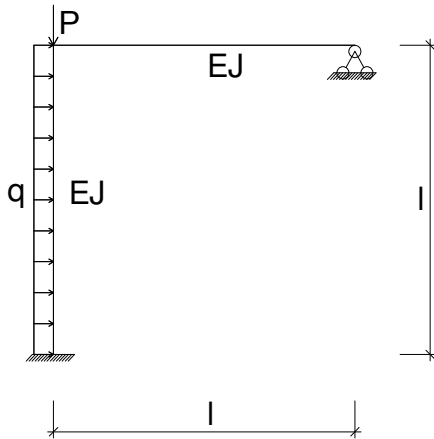


Рис. 1. Расчетная схема рамы

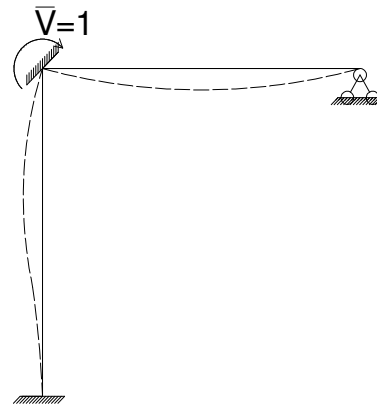


Рис. 2. Основная система метода перемещений

Единичная и грузовая эпюры моментов без учета продольных сил в стержнях представлены на рис. 3.

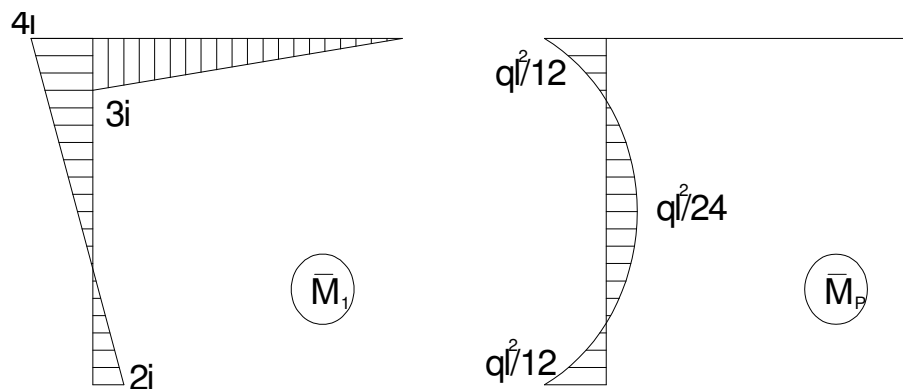


Рис. 3. К недеформированному расчету рамы

Реакция наложенной связи от единичного угла поворота $r_{11} = 7i$; реакция от внешней нагрузки $R_{1p} = \frac{ql^2}{12} = \frac{Pl}{12}$.

Перемещение узла составит:

$$V_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}} = -\frac{Pl}{12 \cdot 7i} = -\frac{Pl}{84i}.$$

Окончательную эпюру моментов (рис. 4) вычислим по выражению: $M = \bar{M}_1 \cdot V_1 + M_p$. Наибольший изгибающий момент возникает вблизи заделки: $M = 0,107 Pl$.

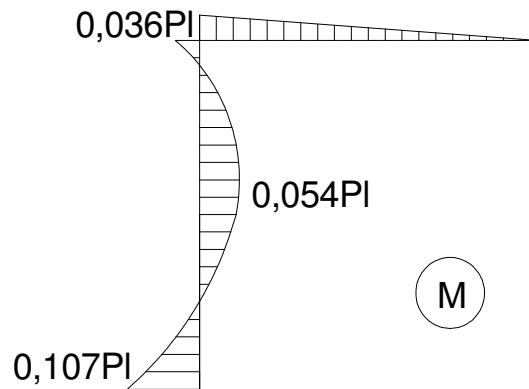


Рис. 4. Результаты расчета рамы без учета продольных сил в стержнях

Выполним деформационный расчет. Поскольку перемещения пока неизвестны, расчет ведем методом последовательных приближений. Продольная сжимающая сила в стойке при узловом приложении нагрузки равна величине силы P . Продольная сжимающая сила в ригеле равна части равномерно-распределенной нагрузки и пока не определена.

1-е приближение.

При сведении распределенной нагрузки ql в узлы рамы будем считать, что на ригель приходится сжимающая сила $ql/2$.

Поскольку сжатие испытывают и ригель, и стойка, единичные эпюры в обоих элементах построим с учетом продольных сил, используя таблицы стандартных элементов метода перемещений для задач устойчивости (рис. 5).

В основной системе деформации изгиба создает только равномерно-распределенная нагрузка. Грузовая эпюра моментов на рис. 6.

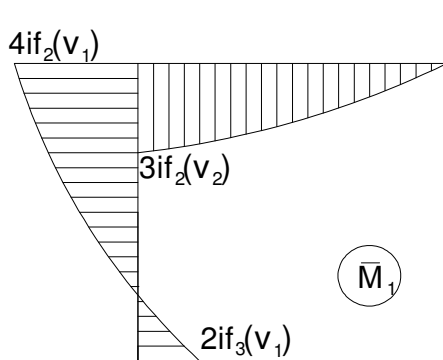


Рис. 5. Единичная эпюра моментов с учетом продольных сил в стержнях

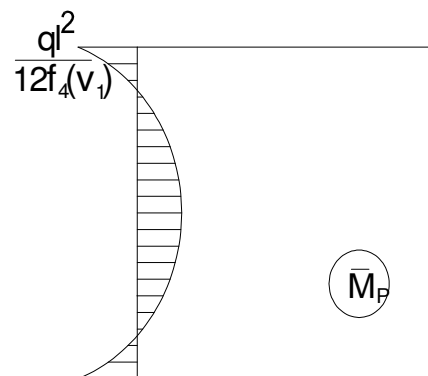


Рис. 6. Грузовая эпюра моментов

Вычислим параметры устойчивости для стойки (1) и ригеля (2). С учетом $ql = P = 0,7F^{\vartheta}$ получим:

$$v_i = \sqrt{\frac{N_i l^2}{EI}} = \sqrt{\frac{N_i l^2 \pi^2}{F^{\vartheta} l^2}} = \pi \sqrt{\frac{N_i}{F^{\vartheta}}}, \text{ здесь } EI \text{ выражено через } F^{\vartheta}. \text{ Тогда}$$

$$v_1 = \pi \sqrt{\frac{N_{cm}}{F^{\vartheta}}} = \pi \sqrt{\frac{P}{F^{\vartheta}}} = \pi \sqrt{0,7} = 2,63;$$

$$v_2 = \pi \sqrt{\frac{N_{пуз}}{F^{\vartheta}}} = \pi \sqrt{\frac{ql/2}{F^{\vartheta}}} = \pi \sqrt{\frac{P/2}{F^{\vartheta}}} = \pi \sqrt{0,35} = 1,86.$$

Определяем значения функций устойчивости по таблице [1].

$$\varphi_1(v_2) = \varphi_1(1,86) = 0,742;$$

$$\varphi_2(v_1) = \varphi_2(2,63) = 0,745;$$

$$\varphi_3(v_1) = \varphi_3(2,63) = 1,146;$$

$$\varphi_4(v_1) = \varphi_4(2,63) = 0,878.$$

$$\text{Вычисляем: } r_{11} = 4i \cdot 0,745 + 3i \cdot 0,742 = 5,206i; \quad R_{1p} = \frac{Pl}{12 \cdot 0,878} = 0,095Pl.$$

Перемещение узла составит:

$$V_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}} = -\frac{0,095Pl}{5,206i} = -0,0182Pl.$$

Изгибающие моменты в сечениях рамы:

В нижнем сечении стойки (вблизи заделки):

$$M_H = 2i\varphi_3(v_1) \cdot V_1 - \frac{Pl}{12\varphi_4(v_1)} = 2i \cdot 1,146 \cdot \left(-0,0182 \frac{Pl}{i}\right) - \frac{Pl}{12 \cdot 0,878} = -0,137Pl;$$

В верхнем сечении стойки и в ригеле вблизи узла:

$$M_B = -4i\varphi_2(v_1) \cdot V_1 - \frac{Pl}{12\varphi_4(v_1)} = -4i \cdot 0,745 \cdot \left(-0,0182 \frac{Pl}{i}\right) - \frac{Pl}{12 \cdot 0,878} = -0,0406Pl;$$

Вычислим поперечную силу в стойке, считая эпюру моментов квадратной параболой:

$$Q_{\text{нижнее}}^{\text{верхнее}} = \frac{0,137Pl - 0,0406Pl}{l} \pm \frac{ql}{2} = 0,0964P \pm 0,5P = \begin{cases} 0,596P; \\ -0,404P. \end{cases}$$

Величина поперечной силы в верхнем сечении стойки $Q = 0,404P = 0,404ql$ показывает, что на ригель действует меньшая сжимающая сила, чем была принята в первом приближении ($N_{пуз} = 0,5ql$). Разница составила 19 %.

Принимаем $N_{пуз} = 0,404ql = 0,404P$.

$$\text{При этом } v_2 = \pi \sqrt{\frac{N_p}{F^{\vartheta}}} = \pi \sqrt{\frac{0,404P}{F^{\vartheta}}} = \pi \sqrt{\frac{0,404 \cdot 0,7F^{\vartheta}}{F^{\vartheta}}} = \pi \sqrt{0,282} = 1,67;$$

$$\varphi_1(v_2) = \varphi_1(1,67) = 0,80;$$

$$r_{11} = 4i \cdot 0,745 + 3i \cdot 0,80 = 5,38i.$$

$$\text{Из канонического уравнения } V_1 = -\frac{R_{1p}}{r_{11}} = -\frac{0,095Pl}{5,38i} = -0,0176 \frac{Pl}{i}.$$

Эпюра моментов для второго приближения показана на рис. 7.

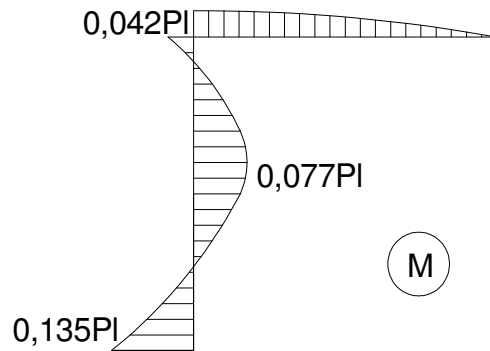


Рис. 7. Результаты расчета рамы по деформированной схеме

Вычислим поперечную силу в верхнем сечении стойки (для ригеля эта сила будет продольной):

$$Q_{\text{верхнее}} = \frac{0,135Pl - 0,042Pl}{l} - \frac{ql}{2} = 0,093P - 0,5P = 0,407P.$$

Значение $N_{\text{риг}}$ изменилось на $\frac{0,407 - 0,4036}{0,4036} \cdot 100\% = 0,8\%$, дальнейшее приближение не требуется.

Сравним результаты расчета. Деформационный расчет дает значение изгибающего момента вблизи заделки $0,135Pl$, обычный расчет по недеформированной схеме в этом же сечении дал $0,107Pl$. Дополнительный изгибающий момент составил $\Delta M = \frac{0,135 - 0,107}{0,107} \cdot 100\% = 26\%$. Увеличение довольно значительное.

Определим, при каком соотношении поперечной нагрузки « q » и сосредоточенной силы « P » неучет деформаций изгиба будет давать значительную погрешность в величине изгибающих моментов.

Выполним расчет этой же рамы при постоянном значении силы P и различных значениях « q », равных: $0,25Pl$; $0,5Pl$; Pl ; $2Pl$. Во всех случаях продольная сила в ригеле не будет превышать критической силы Эйлера. Для всех вариантов нагружения будем сравнивать значения изгибающего момента в сечении стойки вблизи опоры (таблица 1).

Сравнение величин изгибающих моментов

ql/P	Величина момента по недеформированной схеме $M_{нд}$	Величина момента с учетом деформаций изгиба M_d	Приращение момента ΔM
0,25	0,02675Pl	0,0284Pl	6,2%
0,5	0,0535Pl	0,0665Pl	24,3%
1	0,107Pl	0,135Pl	26%
2	0,214Pl	0,2836	31,8%

Для большей наглядности построим графики зависимости ΔM , $M_{нд}$ и M_d от величины поперечной нагрузки (рис. 8, 9).

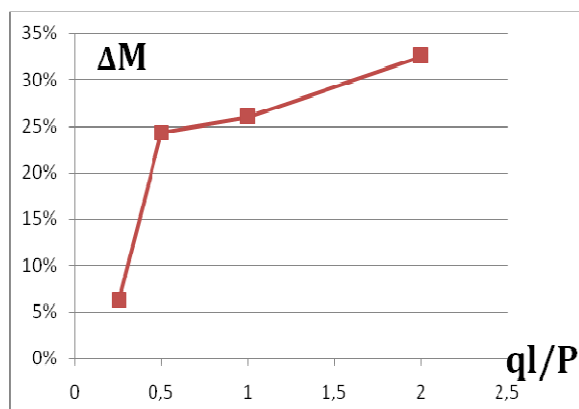


Рис. 8. Приращение изгибающего момента стойки в сечении вблизи опоры при увеличении поперечной нагрузки

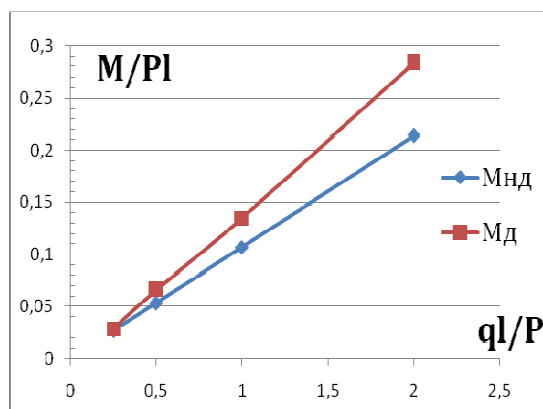


Рис. 9. Величина изгибающих моментов в расчетном сечении

Таким образом, можно заключить, что лишь при поперечной нагрузке, не превышающей четверти величины продольной силы, мы можем доверять расчету по недеформированной схеме. При возрастании поперечной нагрузки искривление сжатого стержня приводит к значительному увеличению изгибающих моментов от продольной силы, эксцентриситет которой растет. Погрешность расчетов в пределах упругой работы материала конструкций при учете деформаций изгиба для рассматриваемой рамы возрастает до 25 % и даже 30 %.

Список литературы

1. Вольмир А. М. Устойчивость упругих систем. М. : Физматгиз, 1963. 879 с.
2. Завьялова О. Б., Шеин А. И. Применение метода конечных разностей при расчете устойчивости многоэтажных рам // Эффективные строительные конструкции: Теория и практика : IX Международная научно-техническая конференция. Пенза : ПГУАС, 2009. С. 142–147.
3. Завьялова О. Б., Шеин А. И. Применение условного сдвига-изгибного стержня при расчете рам на устойчивость // Известия вузов. Строительство. 2010. № 1. С. 99–105.
4. Завьялова О. Б., Шеин А. И. Приближенный расчет на устойчивость многоэтажных рам // Региональная архитектура и строительство. Пенза : ПГУАС, 2014. С. 89–95.
5. Киселев В. А. Строительная механика. Спецкурс. Динамика и устойчивость сооружений. М. : Стройиздат, 1980. С. 480–498.