6. Mkrttchian, V., Stephanova, G. (Book chapter). Training of avatar moderator in sliding mode control environment for virtual project management. In Enterprise Resource Planning: Concepts, Methodologies, Tools, and Applications. IGI Global. 2013, pp. 1376–1405.

7. Mkrttchian, V., Stephanova, G. (Book chapter). Training of avatar moderator in sliding mode control environment for virtual project management. In Project Management Approaches for Online Learning Design. IGI Global. 2013, pp. 175–203.

8. Mkrttchian, V., Hwang, W.-Y., Kataev, M., Bedi, S.S., Fedotova, A. (Book chapter). Using plug-avatars "hhh" technology education as service-oriented virtual learning environment in sliding mode. In Handbook of Research on Emerging Priorities and Trends in Distance Education: Communication, Pedagogy, and Technology. IGI Global. 2014, pp. 43–55.

9. Glotova, T., Deev, M., Krevskiy, I., Matukin,S., Mkrttchian, V., Sheremeteva, E. Individualized learning trajectories using distance education technologies. In Processing Communications in Computer and Information Science.2015, Springer International Publishing Switzerland 2015 A. Kravets et al. (Eds.): CIT&DS 2015, CCIS 535, 2015, pp. 778–792.

10. Bershadsky, A., Evseeva, J., Bozhday, A., Gudkov, ,A. ,Mkrtchian, V. Variability Modeling in the Automated System for Authoring Intelligent Adaptive Applications on the Basis of Three-Dimensional Graphics. In Processing Communications in Computer and Information Science. Springer International Publishing Switzerland 2015 A. Kravets et al. (Eds.): CIT&DS 2015, CCIS 535, 2015, pp. 149–159.

11. Mkrttchian, V., Aysmontas, B., Uddin, M.A., Andreev, A., Vorovchenko, N. (Book chapter). The academic views from Moscow universities on the future of dee at Russia and Ukraine. In Identification, Evaluation, and Perceptions of Distance Education Experts. IGI Global, 2015, pp. 32–45.

12. Mkrttchian, V., Bershadsky, A., Bozhday, A., Fionova, L. (Book chapter). Model in SM of DEE based on service-oriented interactions at dynamic software product lines. In Identification, Evaluation, and Perceptions of Distance Education Experts. IGI Global, 2015, pp. 231–248.

13. Mkrttchian, V., Hwang, W.-Y., Kataev, M., Bedi, S.S., Fedotova, A. (Book chapter). Using plug-avatars "hhh" technology education as service-oriented virtual learning environment in sliding mode. In Leadership and Personnel Management: Concepts, Methodologies, Tools, and Applications. IGI Global. 2016, pp. 890–902.

ЯВНАЯ ФОРМУЛА МНОГООБРАЗИЙ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А. К. Ильясова

Астраханский государственный технический университет

В настоящей работе показано решение одного класса линейного гиперболического дифференциального уравнения с частными производными третьего порядка, приведением к системе трех линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка.

Ключевые слова: *многообразие решений, квазилинейное уравнение, нелинейное уравнение, гиперболический тип, резольвента, интегральное представление.*

AN EXPLICIT FORMULA FOR MANIFOLDS OF SOLUTIONS TO LINEAR HYPERBOLIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS THIRD ORDER

A. K. Ilyasova

Astrakhan State Technical University

In this paper we show the solution of a class of linear hyperbolic partial differential equation of third order, bringing to a system of three linear partial differential equations of the first order.

Key words: *variety of solutions, a quasi-linear equation, a nonlinear equation of hyperbolic type, resolution, integral representation.*

Сведение уравнений с частными производными третьего порядка к системе линейных уравнений первого порядка

Пусть Ω обозначит прямоугольный параллелепипед $\Pi(\alpha,\beta,\gamma)$ с вершинами в точках

$$A_1(\alpha,0,0),\ B_1(0,0,0),\ C_1(0,\beta,0),\ D_1(\alpha,\beta,0),$$

$$A_2(\alpha,0,\gamma)\ B_2(0,0,\gamma),\ C_2(0,\beta,\gamma),\ D_2(\alpha,\beta,\gamma);$$

$$\Pi(\alpha,\beta,\gamma)=\{(x,y,z):0<x<\alpha,0<y<\beta,0<z<\gamma\}$$

Пусть:

$$\Pi_1(\alpha)=\{0\le x\le\alpha,\ y=z=0\},$$

$$\Pi_2(\beta)=\{0\le y\le\beta,\ x=z=0\},$$

$$\Pi_3(\gamma)=\{0\le z\le\gamma,\ x=y=0\}$$

множество точек, замкнутых промежутков, соответственно, на вещественной, мнимой оси и оси аппликат.

В области Ω рассмотрим уравнение следующего вида:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z}+a(x,y,z)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}+b(x,y,z)\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+\\ +d(x,y,z)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+m(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x}+n(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y}+\\ +c(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z}+\mu(x,y,z)u=\Phi(x,y,z)\end{gathered}\tag{1.1}$$

где a, b, d, m, n, c, μ – заданные функции, Φ(x, y, z) – правая часть.

Предположим, что функция a(x, y, z) по переменной y непрерывна и по переменной x и z имеет непрерывные, смешанные производные второго порядка. Допустим, что функции b(x, y, z) и c(x, y, z) по переменной z имеют непрерывные производные первого порядка, а по остальным переменным, непрерывны.

При таких предложениях, уравнение (1.1) всегда можно преобразовать к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial z}(A_{(r)}[u])+d(x,y,z)A_{(r)}[u]=B_{(r)}[u]+\Phi(x,y,z)\tag{1.2}$$

где $A_{(r)}$ и $B_{(r)}$ являются регулярными линейными дифференциальными операторами, которые задаются следующими формулами:

$$A_{(r)} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a(x, y, z)\frac{\partial}{\partial x} + b(x, y, z)\frac{\partial}{\partial y} + c(x, y, z),$$

$$B_{(r)} \equiv P(x, y, z)\frac{\partial}{\partial x} + R(x, y, z)\frac{\partial}{\partial y} + Q(x, y, z),$$

здесь:

$$P(x, y, z) = a(x, y, z)d(x, y, z) + \frac{\partial a(x, y, z)}{\partial z} - m(x, y, z),$$

$$R(x, y, z) = \frac{\partial b(x, y, z)}{\partial z} + b(x, y, z)d(x, y, z) - n(x, y, z),$$

$$Q(x, y, z) = c(x, y, z)d(x, y, z) + \frac{\partial c(x, y, z)}{\partial z} - \mu(x, y, z).$$

Если результата действия оператора $A_{(r)}$ на функцию u(x, y, z) обозначить через новую неизвестную функцию f = f(x, y, z), то при условиях

$$m(x, y, z) = \frac{\partial a(x, y, z)}{\partial z} + a(x, y, z)d(x, y, z), \qquad (M)$$

$$n(x, y, z) = b(x, y, z)d(x, y, z) + \frac{\partial b(x, y, z)}{\partial z}, \qquad (N)$$

$$\mu(x, y, z) = \frac{\partial c(x, y, z)}{\partial z} + c(x, y, z)d(x, y, z), \qquad (S)$$

будем иметь дело с системой следующего вида:

$$\begin{cases} A_{(r)}[u] = f(x, y, z) \\ T_{(r)}[f] = \Phi(x, y, z). \end{cases} \qquad (1.3)$$

где $T_{(r)}$ является регулярным линейным дифференциальным оператором, который задается следующей формулой:

$$T_{(r)} \equiv \frac{\partial}{\partial z} + d(x, y, z).$$

Согласно [1], дифференциальный оператор $A_{(r)}$ представим в следующем виде:

$$A_{(r)} = I_{(x)} \cdot I_{(y)},$$

где $I_{(x)}I_{(y)}$ – дифференциальные операторы следующих видов:

$$I_{(x)} \equiv \frac{\partial}{\partial x} + b(x, y, z),$$

$$I_{(y)} \equiv \frac{\partial}{\partial y} + a(x, y, z)$$

Тогда:

$$I_{(x)}I_{(y)}[u] + f(x, y, z) \qquad (1.4)$$

где $I_{(s)} = a(x, y, z)b(x, y, z) + \dfrac{\partial a(x, y, z)}{\partial x} - c(x, y, z),$ следовательно, система (1.3) примет следующий вид:

$$\begin{cases} I_{(x)}I_{(y)}[u] = I_{(s)}[u] + f(x,y,z) \\ T_{(r)}[f] = \Phi(x,y,z) \end{cases} \quad (1.5)$$

Если результат действия оператора $I_{(y)}$ на функцию u(x, y, z) обозначить через новую неизвестную функцию V = V(x, y, z), то при условии

$$c(x,y,z) = a(x,y,z)b(x,y,z) + \frac{\partial a(x,y,z)}{\partial x} \quad (E)$$

получим систему следующего вида:

$$\begin{cases} I_{(y)}[u] = V(x,y,z) \\ I_{(x)}[V] = f(x,y,z) \\ T_{(r)}[f] = \Phi(x,y,z). \end{cases} \quad (1.6)$$

Таким образом установлено, что если в уравнение (1.1) функция $a(x,y,z) \in C^2_{xy}(\Omega), b(x,y,z), c(x,y,z) \in C^1_z(\Omega)$ и коэффициенты связаны между собой условиями *(M), (N), (S)* и *(E)*, то задача о нахождении общего решения дифференциального уравнения с частными производными третьего порядка вида (1.1), будет равносильна задаче о нахождение общего решения линейной системы трех дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка вида (1.6).

Интегральное представление уравнения с частными производными третьего порядка гиперболического типа

Целью настоящего параграфа является получение формулы явного решения через произвольные функции. Для этого нам достаточно решить систему вида (1.6). Решая, в отдельности, каждое уравнение системы (1.6), соответственно, получим следующие представления:

$$u(x,y,z) = \exp(-\omega_1(x,y,z))(\varphi(x,z) + F(x,y,z) \quad (1.7)$$

$$V(x,y,z) = \exp(-\omega_2(x,y,z))(\psi(x,z) + M(x,y.z)), \quad (1.8)$$

$$f(x,y,z) = \exp(-\omega_3(x,y,z))(\eta(x,z) + N(x,y,z)), \quad (1.9)$$

где интегральные операторы $\omega_j,\ j = 1,2,3.....,F,M,N$ задаются следующими формулами:

$$\omega_1(x,y,z)=\int_{y_0}^{y} a(x,\tau,z)d\tau,$$

$$\omega_2(x,y,z)=\int_{x_0}^{x} b(t,y,z)dt,$$

$$\omega_3(x,y,z)=\int_{z_0}^{z} d(x,y,\xi)d\xi,$$

$$F(x,y,z)=\int_{y_0}^{y} V(x,\tau,z)\exp[\omega_1(x,\tau,z)]d\tau,$$

$$M(x,y,z)=\int_{x_0}^{x} f(t,y,z)\exp[\omega_2(t,y,z)]dt,$$

$$N(x,y,z)=\int_{z_0}^{z} \Phi(x,y,\xi)\exp[\omega_{31}(x,y,\xi)]d\xi.$$

В этих выражениях, функции φ(x, z), ψ(y, z) и η(x, y), являются произвольными функциями от двух независимых переменных.

В равенстве (1.8) вместо f = (x, y, z) подставляя ее значения из равенства (1.9), затем в равенство (1.7) вместо V(x, y, z) подставляя ее значения из полученного равенства, будем иметь представление следующего вида:

$$u(x,y,z)=\exp[-\omega_1(x,y,z)]\varphi(x,y)+\int_{y_0}^{y}\exp[\omega_1(x,\tau,z)-\omega_1(x,y,z)]\cdot\{\exp[-\omega_2(x,\tau,z)]\cdot\psi(\tau,z)+$$

$$+\int_{x_0}^{x}\exp[\omega_2(t,\tau,z)-\omega_2(t,\tau,z)]\cdot(\exp[-\omega_3(t,\tau,z)]\cdot\eta(t,\tau)+$$

$$+\int_{z_0}^{z}\exp[\omega_3(t,\tau,\xi)-\omega_3(t,\tau,z)]\cdot\Phi(t,\tau,\xi)d\xi)dt\ \}d\tau$$

(1.10)

Таким образом, доказана справедливость следующего утверждения:

<u>Теорема.</u> Пусть в уравнение (1.1) $a(x,y,z)\in C^2_{xy}(\Omega), b(x,y,z), c(x,y,z)\in C^1_z(\Omega)$ и выполнены условия *(M), (N), (S)* и *(E),* тогда любое решение данного уравнения представимо в виде *(1.10),* которое содержит три произвольные функции от двух независимых переменных.

<u>Замечание 1.</u> Если выполнены условия *(M), (N), (S)* и $C_1(x,y,z)=a(x,y,z)b(x,y,z)+\dfrac{\partial a(x,y,z)}{\partial x}-c(x,y,z)\neq 0,$ то уравнение (1.1) сведется к интегральному уравнению Вольтера второго рода. Если не

выполняется хотя бы одно из условий *(M), (N), (S),* то уравнение (1.1) сведется к интегро-дифференциальному уравнению.

Замечание 2. При $x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$ значение искомой функции на $\Pi_1(\alpha)$, $\Pi_2(\beta)$, $\Pi_3(\gamma)$, соответственно, находится из следующих равенств:

$$u(x,0,0) = \varphi(x,0),$$

$$u(0,y,0) = \exp[-\omega_1(0,y,0)]\cdot\varphi(0,y) + \int_{y_0}^{y}\exp[\omega_1(0,\tau,0) - \omega_1(0,y,0)]\cdot\psi(\tau,0)d\tau,$$

$$u(0,0,z) = \varphi(0,z).$$

Замечание 3. Когда $u = u(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)$ и главная часть линейного дифференциального уравнения в частных производных m-го порядка имеет вид:

$$\frac{\partial^m u}{\prod_{j=1}^{m} dx}, m = 1,2,3,\ldots\ldots,n,$$

интегральное представление находится аналогично уравнению(1.1).

Представление многообразия решений (1.10) применяется для выяснения постановок новых краевых задач и их исследования. В частности, с помощью интегрального представления вида (1.10) для уравнения (1.1) возможна подстановка и решение задачи типа Коши.

Приведем формулировку этой задачи.

Задача. Найти решение U(x, y, z) уравнения (1.1) из класса $C^3(\Omega)$, которое удовлетворяет условиям следующих видов:

1) $U(x, y, z)|_{x=x0} = f(y, z)$;

2) $U(x, y, z)|_{y=y0} = g(x, z)$;

3) $U(x, y, z)|_{z=z0} = h(x, y)$,

где *f, g* и *h* – заданные функции соответствующих классов.

Список литературы

1. Раджабов Н. Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией и сингулярными поверхностями, часть 4. Душанбе : ТГУ им. В. И. Ленина, 1985. 147 с.
2. Фозилов С. Т. Явные решения и граничные задачи для одного класса нелинейных уравнений третьего порядка с двумя сингулярными плоскостями // Актуальные проблемы науки в России : материалы Всероссийской научно-практической конференции. Кузнецк, 2005. Вып. 3, том 3. С. 86–89.
3. Бицадзе А. В. Уравнение математической физики. М. : Наука, 1982. 336 с.
4. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М. : Наука,1981. 448 с.
5. Михайлов Л. Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его применение к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Душанбе : Изд-во АН Тадж. ССР, 1963. 233 с.
6. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М. : Наука, 1966. 292 с.
7. Нахушев А. М. О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференциальные уравнения. 1969. № 1. С. 79–84.