СХОДИМОСТЬ АНАЛИТИЧЕСКОГО РАСЧЕТА СВАИ НА ГОРИЗОНТАЛЬНУЮ СТАТИЧЕСКУЮ НАГРУЗКУ С РАСЧЕТОМ ПО МЕТОДУ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В. А. Пшеничкина, В. В. Дроздов, С. И. Строк
Волгоградский государственный технический университет

В процессе проектирования зданий и сооружений часто возникает необходимость в расчете свай на горизонтальные нагрузки. Существуют различные способы проведения таких расчетов. Так, профессор Б. Н. Жемочкин предлагал рассчитывать сваю как стержень в упругом полупространстве. Более подробно о предпосылках и положениях такого расчета можно ознакомиться в его соответствующем труде [1]. Данный способ предполагает большие для своего времени вычисления, которые сегодня нетрудно автоматизировать. Составим программу, проведем расчет сваи и сравним результат с расчетом по методу конечных элементов.

Предположим, что мы имеем круглую железобетонную сваю диаметром 500 мм и длиной 10,5 м, погруженную в песчаный грунт на глубину 10 м. Соответственно, длина оголовка сваи будет составлять 0,5 м. На оголовок воздействуют статические нагрузки: горизонтальная сила10 тс и изгибающий момент 1 тс·м.

Составляем программу в наиболее распространенной системе компьютерной алгебры Mathcad [2]. Последовательно вводим исходные данные: длину забивки сваи L_{sp}, длину оголовка сваи L_{hp} и ширину (в данном случае диаметр) сваи b_p. Все единицы измерения длины – в метрах:

$$Lsp := 10 \qquad Lhp := 0.5 \qquad bp := 0.5$$

Вводим параметры, характеризующие жесткостные характеристики сваи, в частности момент инерции круглого сечения сваи I_p, м^4, и модуль упругости материала сваи E_p, тс/м^2, условно принимаемый как для тяжелого бетона класса В25, который в соответствии с действующими нормативными документами [3] равен 30000 МПа (около 3×10^6 т/м^2):

$$Ip := \frac{\pi \cdot bp^4}{64} \qquad Ep := 3 \cdot 10^6$$

Горизонтальная сила P, тс, и изгибающий момент M, тс·м, действующие на оголовок сваи:

$$P := 10 \qquad M := 1$$

Параметры, характеризующие деформационные характеристики грунта: модуль деформации E_0, тс/м^2, и коэффициент поперечных деформаций μ (коэффициент Пуассона). Их принимаем ориентировочно по нормативам [4, 5] как для песков средней крупности четвертичных отложений с коэффициентом пористости 0,55. Тогда модуль деформации будет составлять 40 МПа (около 4000 тс/м^2), коэффициент Пуассона – 0,3:

$$E0 := 4000 \qquad \mu := 0.3$$

Вводим количество расчетных участков n, равное целому числу (для удобства принимаем $n = 10$). На основании этого определяются длины расчетных участков c, м, а также размерность в дальнейшем составляемой системы уравнений (индексы k и i):

$$n := 10 \qquad c := \frac{Lsp}{n}$$

$$k := 0..(n-1) \qquad i := 0..(n-1)$$

На этом ввод исходных данных в программу заканчивается. Вводимые далее формулы в корректировке не нуждаются.

Вектора со значениями глубин рассматриваемых точек от поверхности a_k и от середины верхнего участка a_k^0, м:

$$a_k := \frac{c}{2} + k \cdot c \qquad a0_k := k \cdot c$$

Введем вспомогательные обозначения, предложенные Б. Н. Жемочкиным: коэффициенты $\xi_{k,i}$, $\zeta_{k,i}$, η [1, с. 21] и α [1, с. 31]:

$$\xi_k := \frac{a_k}{c} \qquad \zeta_{k,i} := \frac{a_i - a_k}{c} \qquad \eta := \frac{bp}{c} \qquad \alpha := \frac{4 \cdot \pi \cdot E0 \cdot (1-\mu) \cdot c^4}{3 \cdot (1+\mu) \cdot (3 - 4 \cdot \mu) \cdot Ep \cdot Ip}$$

Составим матрицы со значениями вспомогательных функций $F_{k,i}^{\mathrm{I}}$, $F_{k,i}^{\mathrm{II}}$ и $F_{k,i}^{\mathrm{III}}$ [1, с. 24–25]. Функцию $F_{k,i}^{\mathrm{I}}$ для удобства восприятия разобьем на шесть слагаемых с учетом того, что элементы матрицы, расположенные на главной диагонали (при $k = i$), вычисляются по иной формуле:

$$FI1_{k,i} := \begin{cases} \left(\dfrac{2 \cdot \zeta_{k,i} + 1}{\eta}\right) \cdot \ln\left[\left(\dfrac{\eta}{2 \cdot \zeta_{k,i} + 1}\right) + \sqrt{\left(\dfrac{\eta}{2 \cdot \zeta_{k,i} + 1}\right)^2 + 1}\right] & \text{if } k \neq i \\ \ln\left(1 + \sqrt{\eta^2 + 1}\right) + \dfrac{1}{\eta} \cdot \ln\left(\eta + \sqrt{\eta^2 + 1}\right) - \ln(\eta) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$FI2_{k,i} := \begin{cases} -\left(\dfrac{2 \cdot \zeta_{k,i} - 1}{\eta}\right) \cdot \ln\left[\left(\dfrac{\eta}{2 \cdot \zeta_{k,i} - 1}\right) + \sqrt{\left(\dfrac{\eta}{2 \cdot \zeta_{k,i} - 1}\right)^2 + 1}\right] & \text{if } k \neq i \\ \ln\left(1 + \sqrt{\eta^2 + 1}\right) + \dfrac{1}{\eta} \cdot \ln\left(\eta + \sqrt{\eta^2 + 1}\right) - \ln(\eta) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$FI3_{k,i} := \begin{cases} \ln\left[\dfrac{\left(\dfrac{2 \cdot \zeta_{k,i} + 1}{\eta}\right) + \sqrt{\left(\dfrac{2 \cdot \zeta_{k,i} + 1}{\eta}\right)^2 + 1}}{\left(\dfrac{2 \cdot \zeta_{k,i} - 1}{\eta}\right) + \sqrt{\left(\dfrac{2 \cdot \zeta_{k,i} - 1}{\eta}\right)^2 + 1}}\right] & \text{if } k \neq i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$FI4_{k,i} := \begin{cases} \left(\dfrac{4 \cdot \xi_i - 2 \cdot \zeta_{k,i} + 1}{\eta}\right) \cdot \ln\left[\left(\dfrac{\eta}{4 \cdot \xi_i - 2 \cdot \zeta_{k,i} + 1}\right) + \sqrt{\left(\dfrac{\eta}{4 \cdot \xi_i - 2 \cdot \zeta_{k,i} + 1}\right)^2 + 1}\right] & \text{if } k \neq i \\ \left(\dfrac{4 \cdot \xi_i + 1}{\eta}\right) \cdot \ln\left[\left(\dfrac{\eta}{4 \cdot \xi_i + 1}\right) + \sqrt{\left(\dfrac{\eta}{4 \cdot \xi_i + 1}\right)^2 + 1}\right] & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$FI5_{k,i} := \begin{cases} -\left(\dfrac{4\cdot\xi_i - 2\cdot\zeta_{k,i} - 1}{\eta}\right)\cdot\ln\left[\left(\dfrac{\eta}{4\cdot\xi_i - 2\cdot\zeta_{k,i} - 1}\right) + \sqrt{\left(\dfrac{\eta}{4\cdot\xi_i - 2\cdot\zeta_{k,i} - 1}\right)^2 + 1}\right] & \text{if } k \ne i \\ -\left(\dfrac{4\cdot\xi_i - 1}{\eta}\right)\cdot\ln\left[\left(\dfrac{\eta}{4\cdot\xi_i - 1}\right) + \sqrt{\left(\dfrac{\eta}{4\cdot\xi_i - 1}\right)^2 + 1}\right] & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$FI6_{k,i} := \begin{cases} \ln\left[\dfrac{\left(\dfrac{4\cdot\xi_i - 2\cdot\zeta_{k,i} + 1}{\eta}\right) + \sqrt{\left(\dfrac{4\cdot\xi_i - 2\cdot\zeta_{k,i} + 1}{\eta}\right)^2 + 1}}{\left(\dfrac{4\cdot\xi_i - 2\cdot\zeta_{k,i} - 1}{\eta}\right) + \sqrt{\left(\dfrac{4\cdot\xi_i - 2\cdot\zeta_{k,i} - 1}{\eta}\right)^2 + 1}}\right] & \text{if } k \ne i \\ \ln\left[\dfrac{\left(\dfrac{4\cdot\xi_i + 1}{\eta}\right) + \sqrt{\left(\dfrac{4\cdot\xi_i + 1}{\eta}\right)^2 + 1}}{\left(\dfrac{4\cdot\xi_i - 1}{\eta}\right) + \sqrt{\left(\dfrac{4\cdot\xi_i - 1}{\eta}\right)^2 + 1}}\right] & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$FI := FI1 + FI2 + FI3 + FI4 + FI5 + FI6$$

Функции $F_{k,i}^{\mathrm{II}}$ и $F_{k,i}^{\mathrm{III}}$ имеют более простую запись:

$$FII_{k,i} := \begin{cases} \dfrac{2\cdot\xi_i(\xi_i - \zeta_{k,i})}{(2\cdot\xi_i - \zeta_{k,i})^3} & \text{if } k \ne i \\ \dfrac{1}{4\cdot\xi_i} & \text{otherwise} \end{cases} \qquad FIII_{k,i} := \begin{cases} -\dfrac{2}{2\cdot\xi_i - \zeta_{k,i}} & \text{if } k \ne i \\ -\dfrac{1}{\xi_i} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Матрица $\overline{\omega}_{k,i}$, выражающая прогибы k-ой точки от единичной силы, приложенной в i-ой точке, для стержня, защемленного в точке 0:

$$\omega1_{k,i} := \begin{cases} \left(\dfrac{a0_k}{c}\right)^2\cdot\left(3\cdot\dfrac{a0_i}{c} - \dfrac{a0_k}{c}\right) & \text{if } k \le i \\ \left(\dfrac{a0_i}{c}\right)^2\cdot\left(3\cdot\dfrac{a0_k}{c} - \dfrac{a0_i}{c}\right) & \text{otherwise} \end{cases}$$

Матрица $\delta_{k,i}$, выражающая суммарные перемещения k-ой точки от единичной силы, приложенной в i-ой точке, для стержня в упругой среде:

$$\delta_{k,i} := FI_{k,i} + \frac{1}{3 - 4\cdot\mu}\cdot FII_{k,i} + \frac{\mu\cdot(1 - 2\cdot\mu)}{3 - 4\cdot\mu}\cdot FIII_{k,i} + \alpha\cdot\omega1_{k,i}$$

Матрица коэффициентов MA при неизвестных силах X_k, углах поворота ϕ_0 и перемещениях u_0, а также вектор внешних воздействий VP:

$$
\begin{aligned}
MA := \;&\text{for } k \in 0..(n+1)\\
&\quad \text{for } i \in 0..(n+1)\\
&\qquad \left|\begin{array}{l}
M_{k,i} \leftarrow \delta_{k,i} \ \text{ if } k \le (n-1) \wedge i \le (n-1)\\
M_{k,i} \leftarrow a0_k \ \text{ if } k \le (n-1) \wedge i = n\\
M_{k,i} \leftarrow a0_i \ \text{ if } k = n \wedge i \le (n-1)\\
M_{k,i} \leftarrow 1 \ \text{ if } k \le (n-1) \wedge i = (n+1)\\
M_{k,i} \leftarrow 1 \ \text{ if } k = (n+1) \wedge i \le (n-1)\\
M_{k,i} \leftarrow 0 \ \text{ otherwise}
\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
VP := \;&\text{for } k \in 0..(n+1)\\
&\quad \left|\begin{array}{l}
VP_k \leftarrow P\cdot\left(\dfrac{c}{2} + Lhp\right) + M \ \text{ if } k = n\\
VP_k \leftarrow -P \ \text{ if } k = (n+1)\\
VP_k \leftarrow 0 \ \text{ otherwise}
\end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Через умножение обратной матрицы коэффициентов $-MA^{-1}$ на вектор внешних воздействий VP находим вектор неизвестных VX :

$$VX := -MA^{-1}\cdot VP$$

Выделяем из вектора VX искомые силы X_k, а также действительный угол поворота $\phi_0^{д}$, рад., и действительное перемещение $u_0^{д}$, м, в точке 0:

$$
\begin{aligned}
X := \;&\text{for } k \in 0..(n-1)\\
&\quad X_k \leftarrow VX_k
\end{aligned}
$$

$$\phi0 := \frac{(1+\mu)\cdot(3-4\cdot\mu)}{8\cdot\pi\cdot E0\cdot(1-\mu)\cdot c}\cdot VX_n \qquad \phi0 = 2.189\times 10^{-3}$$

$$u0 := \frac{(1+\mu)\cdot(3-4\cdot\mu)}{8\cdot\pi\cdot E0\cdot(1-\mu)\cdot c}\cdot VX_{n+1} \qquad u0 = -2.479\times 10^{-3}$$

Зная силы X_k, можно вычислить действительные перемещения $u_k^{д}$:

$$
\begin{aligned}
u := \;&\text{for } k \in 0..(n-1)\\
&\quad \text{for } i \in 0..(n-1)\\
&\qquad u_k \leftarrow \frac{(1+\mu)\cdot(3-4\cdot\mu)}{8\cdot\pi\cdot E0\cdot(1-\mu)\cdot c}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\left[X_i\cdot\left[FI_{k,i} + \frac{1}{3-4\cdot\mu}\cdot FII_{k,i} + \frac{\mu\cdot(1-2\cdot\mu)}{3-4\cdot\mu}\cdot FIII_{k,i}\right]\right]
\end{aligned}
$$

Результаты вычислений перемещений точек аналитическим методом $u_k^{д}$ представлены в таблице 1.

Произведем аналогичный расчет сваи методом конечных элементов (МКЭ), используя программный комплекс ЛИРА 10.6[6]. В массив грунта размером 20×20×20 м из объемных конечных элементов КЭ36 поместим стержень (КЭ10), на который прикладываем нагрузку.

Общий вид расчетной схемы представлен на рис. 1. Результаты вычислений перемещений аналогичных точек методом конечных элементов $u_k^{МКЭ}$ представлены в таблице 1.

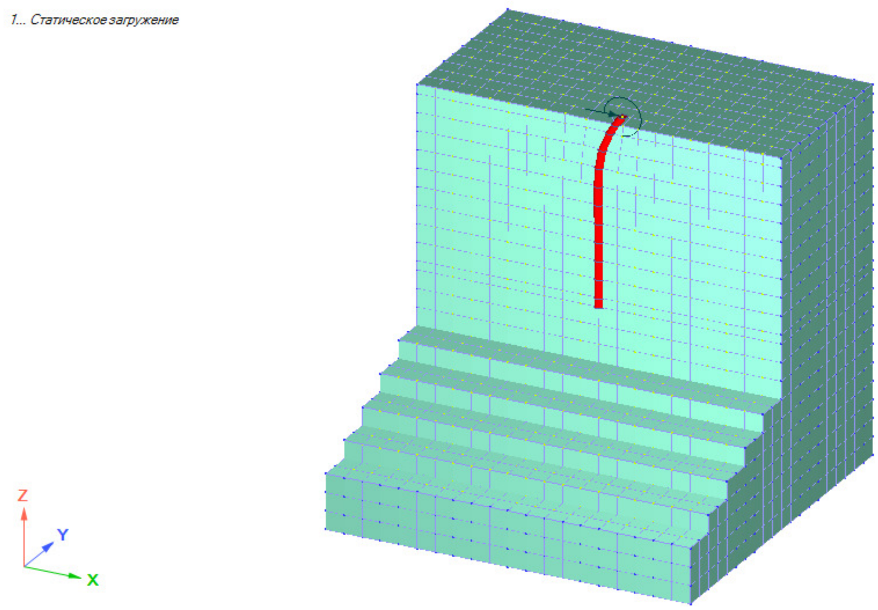

Рис. 1. Деформированная расчетная схема по результатам расчетов в ПК ЛИРА 10.6 (часть конечных элементов грунта скрыта)

Таблица 1

Сравнение результатов вычислений перемещений

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_k, м	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5
$u_k^{д}$, мм	2,479	0,847	0,131	–0,063	–0,049	0,010	0,052	0,070	0,073	0,069
$u_k^{МКЭ}$,мм	1,977	0,639	0,041	–0,120	–0,104	–0,051	–0,013	0,004	0,007	0,005

Сравнивая результаты расчетов аналитическим методом и методом конечных элементов, видно, что перемещения в ключевых точках вполне сопоставимы. Разработанную программу в Mathcad можно использовать в практических расчетах для предварительного определения сечения и длины сваи, воспринимающей горизонтальные нагрузки.

Список литературы

1. Жемочкин Б. Н. Расчет упругой заделки стержня (Изгиб стержня в упругом полупространстве) / проф. Б. Н. Жемочкин. М. : Стройиздат, 1948. 68 с.

2. Макаров Е. Г. Инженерные расчеты в Mathcad. Учебный курс. СПб. : Питер, 2005. 448 с.

3. СП 63.13330.2012. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003. М. : ФАУ «ФЦС», 2012. 156 с.

4. СП 22.13330.2011. Основания зданий и сооружений. Актуализированная редакция СНиП 2.02.01-83. М. : ОАО «ЦПП», 2011. 162 с.

5. СП 24.13330.2011. Свайные фундаменты. Актуализированная редакция СНиП 2.02.03-85. М. : ОАО «ЦПП», 2011. 87 с.

6. Введение в программный комплекс ЛИРА 10.4 : учеб. пособие / О. А. Ковальчук, А. В. Колесников, Е. М. Русанова[и др.]. М. : НИУ МГСУ, 2015. URL: http://lira-soft.com/download/metodpos/index.php