ПОЛУЧЕНИЕ МАТРИЦЫ ОТКЛИКОВ ТРЕУГОЛЬНОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ДЛЯ РАСЧЕТА ПЛАСТИНОК ПО МКЭ В ФОРМЕ КЛАССИЧЕСКОГО СМЕШАННОГО МЕТОДА

А. В. Игнатьев

Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет, г. Волгоград (Россия)

Предлагаемая смешанная форма МКЭ основана на классическом методе строительной механики - смешанном методе. В отличие от смешанных и гибридных формулировок МКЭ, основанных на использовании смешанных функционалов потенциальной энергии (Рейсснера, Ху-Васидзу и др.), предлагаемая форма МКЭ основана на использовании нового понятия – матрицы откликов, являющегося аналогом понятия «матрица жесткости» в МКЭ в форме метода перемещений. Введение этого понятия и разработка алгоритмов ее построения дает возможность так же просто формализовать и алгоритмизировать МКЭ в смешанной форме, как и МКЭ в форме метода перемещений.

Рассмотрим построение матрицы откликов треугольного конечного элемента изгибаемой пластинки, изображенной на рис. 1, с использованием алгоритма, изложенного в работе [1].

Функция формы КЭ принимается в виде неполного бикубического полинома, удовлетворяющего дифференциальному уравнению изгиба пластинки,

$$w(x,y)=\lfloor \Phi_1(x,y)\rfloor\{\alpha\}, \tag{1}$$

где $\lfloor \Phi_1(x,y)\rfloor = \lfloor 1,\, x,\, y,\, x^2,\, y^2,\, xy,\, x^2y,\, xy^2,\, x^3,\, y^3,\, x^3y,\, xy^3 \rfloor$,

$\{\alpha\} = \lfloor \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{12} \rfloor^T$.

Основная система смешанного метода для этого элемента показана на рис. 1.

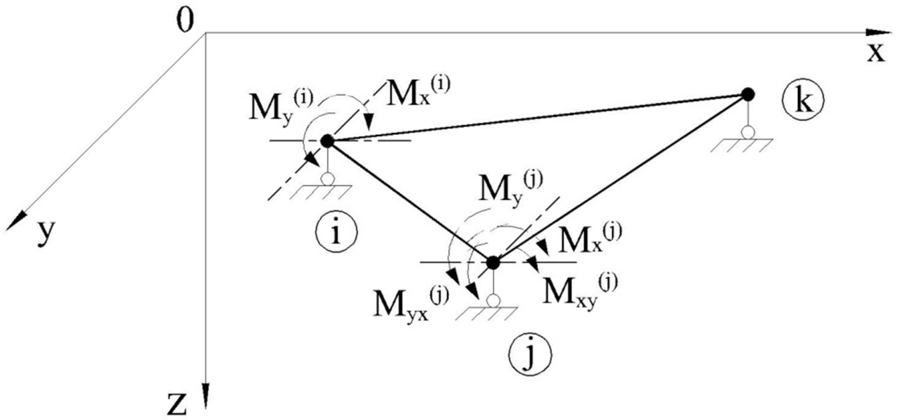

Рис. 1

За неизвестные примем вертикальные линейные смещения Z узловых точек, изгибающие моменты M_x, M_y и крутящие моменты M_{xy} в этих же узловых точках. Плоскости их действия совпадают с плоскостями системы координат.

Все неизвестные образуют вектор $\{q\} = \lfloor q_1, q_2, q_3, \tilde{q}_4, \ldots, \tilde{q}_{12} \rfloor^T$ в котором компоненты q_1, q_2, q_3 относятся к неизвестным линейным смещениям (z_i, z_j, z_k), компоненты $\tilde{q}_4, \ldots, \tilde{q}_9$ - к изгибающим моментам

$\left(M_x^{(i)}, M_y^{(i)}, M_x^{(j)}, M_y^{(j)}, M_x^{(k)}, M_y^{(k)}\right)$, а компоненты $\widetilde{q}_{10}, \widetilde{q}_{11}, \widetilde{q}_{12}$ - к крутящим моментам $\left(M_{xy}^{(i)},\ M_{xy}^{(j)}, M_{xy}^{(k)}\right)$.

Матрицу откликов конечного элемента для наглядности представим в блочном виде

$$[d] = \begin{bmatrix} r & \widetilde{r} \\ \widetilde{\delta} & \delta \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Так как основная система является статически определимой, то все элементы матрицы откликов находится без затруднений.

Все элементы блока r в этом случае равны нулю, так как при единичных линейных смещениях $q_1 = 1, q_2 = 1$ или $q_3 = 1$ происходит поворот КЭ как жесткого целого относительно соответствующих его сторон.

Элементы блока $\widetilde{r}$ можно легко найти из условий статического равновесия.

Элементы блока δ матрицы откликов могут быть получены из выражения

$$\begin{gathered} \delta_{s,t} = \int\limits_{\Omega} [M_x^{(t)}(x,y)\chi_x^{(s)}(x,y) + M_y^{(t)}(x,y)\chi_y^{(s)}(x,y) + \\ + M_{xy}^{(t)}(x,y)\chi_{xy}^{(s)}(x,y)]d\Omega. \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $t = \overline{4,12}, \quad s = \overline{4,12}$ – номера неизвестных.

$$\chi_x^{(s)} = -\frac{\partial^2 w^{(s)}(x,y)}{\partial x^2}, \quad \chi_y^{(s)} = -\frac{\partial^2 w^{(s)}(x,y)}{\partial y^2}, \quad \chi_{xy}^{(s)} = -\frac{\partial^2 w^{(s)}(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

Формирование глобальной матрицы откликов всей пластинки из матриц откликов отдельных КЭ и составление разрешающей системы уравнений производится по алгоритмам, описанным в работах [1, 2].

Литература

1. Игнатьев, В. А. Смешанная форма метода конечных элементов в задачах строительной механики / В. А. Игнатьев, А. В. Игнатьев ; Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. – Волгоград : Изд-во ВолгГАСУ, 2005. – 100 с.

2. Игнатьев, А. В. Алгоритм формирования глобальной матрицы откликов плоской стержневой системы / А. В. Игнатьев, В. В. Габова // Вест. ВолгГАСУ. Сер.: Строит. и арх. – 2009. – Вып. 14 (33). – С. 71–74.