Математическое и физическое моделирование социально-экономических и технологических процессов в строительном комплексе

ВНУТРЕННИЕ РИСКИ ДОЛЬЩИКОВ ПРИ ПОГАШЕНИИ ИПОТЕЧНЫХ КРЕДИТОВ

Ю. В. Холодов
Астраханский инженерно-строительный институт,
г. Астрахань (Россия)

Для устойчивого развития строительной отрасли региона на продукцию отрасли в регионе должен постоянно присутствовать платежеспособный спрос. Самое массовое жилье региона – это жилье эконом-класса, которое в основном приобретается семьей по ипотеке. Скорость оплаты жилья, приобретенного по ипотеке, будет пропорциональна ежемесячному доходу семьи. Погашение процентной ставки ипотечного кредита и основного долга перед банком происходит из дохода, остающегося в распоряжении семьи, и напрямую связано с величиной и сроком самого ипотечного кредита. Тогда дифференциальное уравнение, описывающее данный процесс будет иметь вид:

$$\frac{du}{dt} = k \cdot u \cdot (u - p) \cdot (w - u), \tag{1}$$

где du/dt – скорость погашения ипотечного кредита; u – совокупный доход семьи, p – затраты семьи на удовлетворение физиологических потребностей членов семьи, характеризующихся прожиточным минимумом, сложившимся в регионе, и затратами на содержание жилья, включая жилищно-коммунальные услуги и выплаты по ипотеке; w – общая сумма, выплаченная банку за предоставление ипотечного кредита. Величина $(u - p)$ – доход семьи, остающейся в ее распоряжении. k – коэффициент пропорциональности. Ежемесячные затраты семьи p связаны следующим соотношением:

$$p = N \cdot u_{min} + u_{ky} + u_{б}, \tag{2}$$

здесь N – число членов семьи, u_{min} – минимальный прожиточный уровень в регионе на одного человека, u_{ky} – стоимость коммунальных услуг, $u_{б}$ – ежемесячные выплаты по ипотечному кредиту и процентам по нему.

Предложенное дифференциальное уравнение решается аналитически, в результате преобразований получим

$$t = \frac{1}{kpw(w-p)} \cdot ln\left[\left(\frac{u_з}{u}\right)^{(w-p)} \cdot \left(\frac{u-p}{u_з-p}\right)^{w} \cdot \left(\frac{w-u_з}{w-u}\right)^{p}\right] \qquad (3)$$

Коэффициент пропорциональности k найдем из граничных условий, то есть семья полностью выкупает квартиру, в срок, погасив ипотечный кредит. Но прежде приведем формулы, полученные в работе [1], для оценки ежемесячных выплат банку для погашения ипотечного кредита, взятого в размере А рублей сроком на n лет. При чем, общая сумма ежемесячной оплаты остается постоянной в течение всего срока займа. При этом получается следующее выражение для расчета ежемесячных банковских выплат:

$$u_б = \frac{\mathrm{A}\left(1+\frac{m}{12}\right)^{12n}}{12 \cdot \frac{\left(1+\frac{m}{12}\right)^{12n}}{m} - \frac{12}{m}}, \qquad (4)$$

здесь m – процентная ставка банка за использование ипотечного кредита.

Общая сумма w выплат банку за n лет составит величину:

$$w = 12 \cdot n \cdot \frac{\mathrm{A}\left(1+\frac{m}{12}\right)^{12n}}{12 \cdot \frac{\left(1+\frac{m}{12}\right)^{12n}}{m} - \frac{12}{m}} \qquad (5)$$

Эту величину общих выплат банку w можно получить из предположения постоянства ежемесячных выплат:

$$w = u_б \cdot 12 \cdot n. \qquad (6)$$

Теперь есть все исходные данные для расчета коэффициента пропорциональности k. За год до окончания выплат, то есть по истечении (n – 1) лет банку осталось перечислить $12 \cdot u_б$ рублей, а за (n-1) год банку было перечислено (w – $12 \cdot u_б$) рублей. Подставляя приведенные данные в уравнение (2.10), получим

$$(n-1) = \frac{1}{k \cdot p \cdot w \cdot (w-p)} \cdot ln\left[\left(\frac{u_з}{w - 12 \cdot u_б}\right)^{(w-p)} \cdot \left(\frac{w - 12 \cdot u_б - p}{u_з - p}\right)^{w} \cdot \left(\frac{w - u_з}{12 \cdot u_б}\right)^{p}\right]$$

Отсюда находим коэффициент пропорциональности k

$$k = \frac{ln\left[\left(\frac{u_з}{w-12 \cdot u_б}\right)^{(w-p)} \cdot \left(\frac{w-12 \cdot u_б - p}{u_з - p}\right)^{w} \cdot \left(\frac{w-u_з}{12 \cdot u_б}\right)^{p}\right]}{(n-1)pw(w-p)} \qquad (7)$$

Таким образом, решение дифференциального уравнения (1) имеет вид:

$$t = (n-1) \cdot \frac{ln\left[\left(\frac{u_з}{u}\right)^{(w-p)} \cdot \left(\frac{u-p}{u_з-p}\right)^{w} \cdot \left(\frac{w-u_з}{w-u}\right)^{p}\right]}{ln\left[\left(\frac{u_з}{w-12 \cdot u_б}\right)^{(w-p)} \cdot \left(\frac{w-12 \cdot u_б - p}{u_з - p}\right)^{w} \cdot \left(\frac{w-u_з}{12 \cdot u_б}\right)^{p}\right]} \qquad (8)$$

Рассмотрим следующую задачу: оценим риски семьи по возврату ипотечного кредита в зависимости от процентной ставки банка при следующих условиях: состав семьи – 3 человека, прожиточный минимум в регионе на одного человека u_{min}– 5,5 тысяч рублей в месяц, доход семьи – 35 тысяч рублей, который складывается из средней зарплаты в регионе – 17,5 тысяч рублей. Семья приобретает квартиру в 60 кв. метров, цена кв. метра – 25 тысяч рублей, в среднем расходы семьи за жилищно-коммунальные услуги составят $u_{ky} -$ 2.5 тысяч рублей в месяц. На приобретение жилья семье требуется ипотечный кредит в размере 1,5 миллиона рублей, который берется на 30 лет. Рассмотрим следующие варианты: годовые процентные ставки банка составляют соответственно – 2, 6 и 10 %, доходы и расходы семьи будем считать также в годовом разрезе. Согласно данным таблицы 1, годовые выплаты банку, общая сумма выплат банку и годовые расходы семьи будут соответственно равны

Таблица 1

Общая сумма и годовые выплаты банку
в зависимости от процентной ставки

Процентная ставка по ипотечному кредиту	*Годовые выплаты банку $u_б$ (млн руб.)*	*Общая сумма выплат банку w (млн руб.)*	*Годовые расходы семьи p (млн руб.)*
2 %	$5{,}544 \cdot 10^{-3} \cdot 12 = 0{,}067$	1,996	0,295
6 %	$8{,}993 \cdot 10^{-3} \cdot 12 = 0{,}108$	3,238	0,336
10 %	$13{,}16 \cdot 10^{-3} \cdot 12 = 0{,}158$	4,735	0,386

Подставляя рассчитанные данные в соотношение (8), получим следующие графики, которые получены в среде MATHCAD.

$$t(u, uz, p, w, ub, n) := (n-1) \cdot \frac{\ln\left[\left(\frac{uz}{u}\right)^{w-p} \cdot \left(\frac{u-p}{uz-p}\right)^{w} \cdot \left(\frac{w-uz}{w-u}\right)^{p}\right]}{\ln\left[\left(\frac{uz}{w-12 \cdot ub}\right)^{w-p} \cdot \left(\frac{w-12 \cdot ub-p}{uz-p}\right)^{w} \cdot \left(\frac{w-uz}{12 \cdot ub}\right)^{p}\right]}$$

$$U2(n) := 12 \cdot 0.0055 \cdot n$$

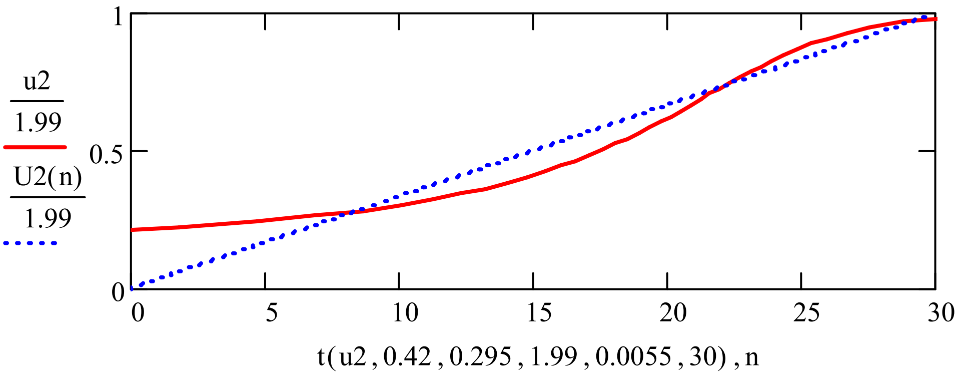

Рис. 1. Динамика выплат семьи при 2 % ставке ипотечного кредита – сплошная линия,
динамика банковских платежей – пунктирная линия,
каждая из которых нормирована на общую суммы выплат банку

Сплошная линия, рассчитанная по формуле (8), показывает динамику расходов семьи, которая нормирована на общую сумму выплат банку. Пунктирная линия, которая также нормирована на общую суммы выплат банку, показывает динамику постоянных платежей банку по ипотечному кредиту, в соответствии с формулой (6). Заметим, что функции (6) и (8), нормированные на соответствующую величину w, представляют собой интегральные функции распределения и тогда по оси абсцисс отсчитывается вероятность погашения ипотечного кредита банку. Как видно из рис. 1, в период, начиная с 8 года и до 22 года, у семьи возникают трудности с погашением ипотечного кредита. Пунктирная линия, характеризующая требуемую динамику банковских платежей, находится выше нежели, чем сплошная линия, описывающая возможности выплат семьи. Разница в этом интервале между пунктирной и сплошной линиями будет равна вероятности риска пропустить срок ежемесячной выплаты банку. Причем, вероятность риска пропустить срок ежемесячной выплаты банку будет возрастать в зависимости от роста процентной ставки банка. Данный факт проиллюстрирован на рис. 2 и 3.

$$U6(n) := 12 \cdot 0.009 \cdot n$$

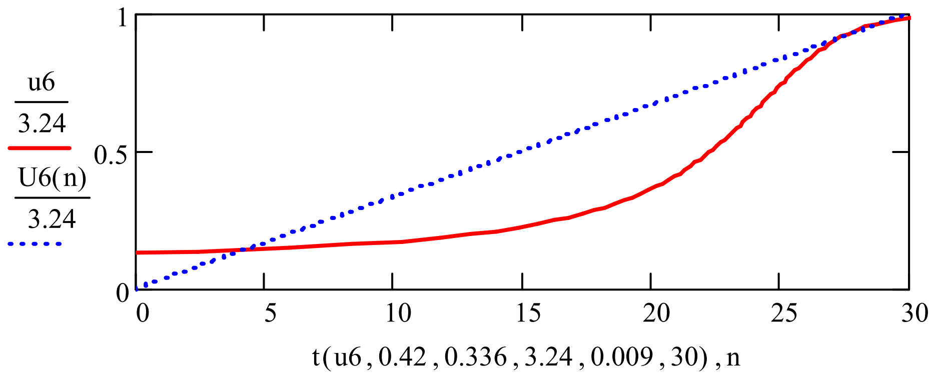

Рис. 2. Динамика выплат семьи при 6% ставке ипотечного кредита – сплошная линия, динамика банковских платежей – пунктирная линия, каждая из которых нормирована на общую суммы выплат банку

Необходимо отметить, что возрастает и продолжительность интервала риска. При 6 % ставке ипотечного кредита, она начинается с 5 года и продолжается до 26 лет. Данные тенденции наблюдаются и при 10 % ставке ипотечного кредита, что видно из рис. 3.

$$U10(n) := 12 \cdot 0.0132 \cdot n$$

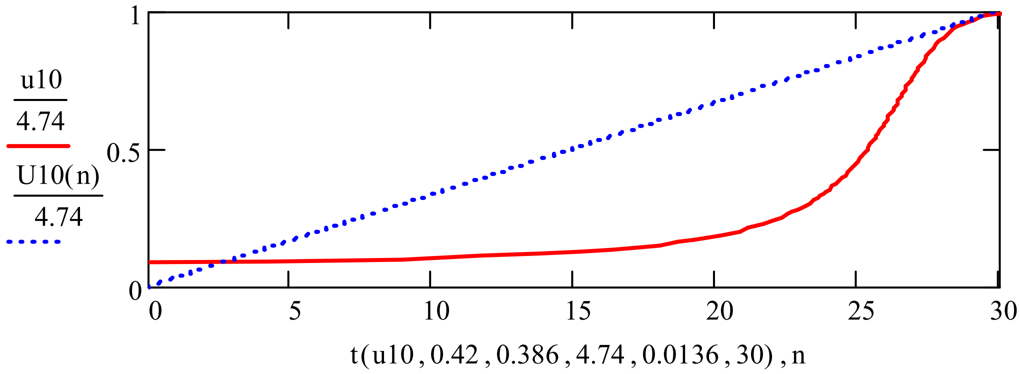

Рис. 3. Динамика выплат семьи при 10 % ставке ипотечного кредита – сплошная линия, динамика банковских платежей – пунктирная линия, каждая из которых нормирована на общую суммы выплат банку

Рассчитаем количественную зависимость вероятности риска пропустить срок ежемесячной выплаты банку в зависимости от процентной ставки ипотечного кредита. Для этого найдем максимальную разность между требуемыми банковскими платежами, описываемой функцией (6) и расходами семьи, характеризуемыми соотношением (8), приравняв производную от разности функций к нулю, определим экстремум разности функций (6) и (8). Нормировав максимальную разность функций (6) и (8) на общую сумм выплат банку, найдем максимальную вероятность риска пропустить срок ежемесячной выплаты банку. Рассмотрим случай, когда m = 2 %. Возьмем производные по t от обеих функций, причем, от второй функции для этого потребуется взять обратную производную по u, и найдем экстремумы разности функций

$$\left(12.\cdot 0.0055 - \frac{1}{\frac{d}{du}t(u, 0.42, 0.295, 1.99, 0.0055, 30)}\right) \text{solve}, u \rightarrow \begin{pmatrix} -.35832114601110726363 \\ .86059787887028203125 \\ 1.7827232671408252324 \end{pmatrix}$$

Нас интересует лишь второй корень, подставляя его значение в соотношение (8), найдем при каком времени погашения кредита, мы можем получить данный корень.

$$t(0.861, 0.42, 0.295, 1.99, 0.0055, 30) = 15.787$$

Далее вычислим значение функции (6) в этой точке

$$U(15.787) = 1.042$$

Максимальная вероятность риска для семьи пропустить срок ежемесячной выплаты банку при 2 % годовой ставки по ипотечному кредиту равна:

$$g_2 = \frac{1{,}042 - 0{,}861}{1{,}99} = 0{,}091 \qquad (9)$$

Проведем аналогичные расчеты для m = 6 % и m = 10 %.

Тогда максимальная вероятность риска для семьи пропустить срок ежемесячной выплаты банку при 6 % годовой ставки по ипотечному кредиту равна

$$g_6 = \frac{2{,}015-1}{3{,}24} = 0{,}313 \qquad (10)$$

При 10 % годовой ставки по ипотечному кредиту, максимальная вероятность риска для семьи пропустить срок ежемесячной выплаты банку равна

$$g_{10} = \frac{3{,}544-1.08}{4{,}74} = 0{,}52 \qquad (11)$$

Таким образом, при 2 % ставке по ипотечному кредиту 9 семей из 100 будут испытывать проблемы с погашением кредита в 1,5 млн рублей, взятых на 30 лет у банка. При 6 % ставке каждая третья семья будет испытывать трудности с погашением кредита, а при 10 % ставке с этими трудностями встретится каждая вторая семья.

Список литературы

1. Хант, В. Matlab официальный учебный курс Кембриджского университета / В. Хант, Р. Липсман, Ж. Розенберг. – М. : Триумф, 2008. – 351 с.