

УДК 69.00

## **РАСЧЕТ ДЛИННЫХ СВАЙ, ПЕРЕСЕКАЮЩИХ ЗОНУ РАЗЛОМА ПРИ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ**

***Е. Н. Курбацкий, Май Дык Минь***

*Московский государственный университет путей сообщения (Россия)*

Разработана методика расчета длинных свай, в зоне разлома основания грунтов при сейсмических воздействиях, основанная на дифференциальных уравнениях Фурье финитных функций. Определены деформационные характеристики конструкции в зоне разлома аналитическим методом на примере практических задач.

**Ключевые слова:** свая большой длины, метод Фурье, финитные функции, функции Хевисайда, грунт, зона разлома.

A technique for calculating long piles in the fault zone base soils under seismic actions, based on the differential equations of the Fourier finite functions. Defined deformation characteristics of the structure in the fault zone analytical method on the example of practical problems.

**Key words:** great length pile, the Fourier method, finite functions, the Heaviside function, ground fault zone.

Исследуется напряженно деформированное состояние длинной сваи, пересекающей зону разлома двух типов грунта с одинаковыми или разными свойствами.

Рассмотрим одинарную сваю в зоне разлома основания грунтов. Рассматриваемая задача горизонтального перемещения сваи и уровень воздействия вертикальной силы на проблему не значительны, поэтому вертикальные силы в задаче не уточнены. Свая рассматривается как балка постоянной жесткости в упругой среде. Упругая среда (грунт) характеризуется коэффициентом упругого отпора (см. рис. 1).

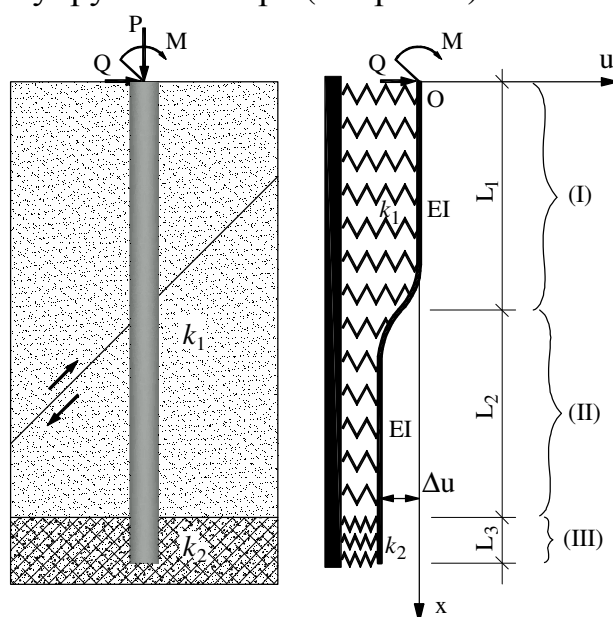


Рис. 1. Расчетная схема сваи при сдвиге

Разделим сваю на три конечных элемента (I), (II) и (III), для каждого элемента координаты система представлена на рис. 2.

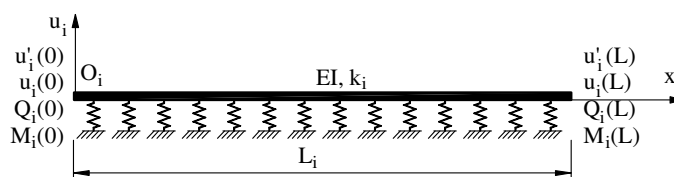


Рис. 2. Расчетная схема координата элемента

Дифференциальное уравнение изгиба балки на упругом основании в обобщенных функциях [1] имеет вид:

для I-го участка:

$$\begin{aligned} EI \frac{d^4 U_1}{dx^4} + k_1 U_1 = & Q_1(0)\delta(x) + M_1(0)\delta'(x) + E I u_1'(0)\delta''(x) + E I u_1(0)\delta'''(x) \\ & - Q_1(L_1)\delta(x-L_1) - M_1(L_1)\delta'(x-L_1) - E I u_1'(L_1)\delta''(x-L_1) \\ & - E I u_1(L_1)\delta'''(x-L_1) \end{aligned} \quad (1)$$

для II-го участка:

$$\begin{aligned} EI \frac{d^4 U_2}{dx^4} + k_1 U_2 = & Q_2(0)\delta(x) + M_2(0)\delta'(x) + E I u_2'(0)\delta''(x) + E I u_2(0)\delta'''(x) \\ & - Q_2(L_2)\delta(x-L_2) - M_2(L_2)\delta'(x-L_2) - E I u_2'(L_2)\delta''(x-L_2) \\ & - E I u_2(L_2)\delta'''(x-L_2) \end{aligned} \quad (2)$$

для III-го участка:

$$\begin{aligned} EI \frac{d^4 U_3}{dx^4} + k_2 U_3 = & Q_3(0)\delta(x_2) + M_3(0)\delta'(x) + E I u_3'(0)\delta''(x) + E I u_3(0)\delta'''(x) \\ & - E I u_3'(L_3)\delta''(x-L_3) - E I u_3(L_3)\delta'''(x-L_3) \end{aligned} \quad (3),$$

где:  $U_i(x) = u_i(x)[H(x) - H(x-L_i)]$ ,  $H(x)$  – функция Хевисайда (функция единичного скачка),  $L_i$  – координата конца части  $i$  сваи,  $\delta(x)$  – функция Дирака.

Используя условие неразрывной сваи, имеем:

$$\begin{aligned} Q_1(0) = Q; \quad M_1(0) = M; \quad u_1(L_1) = u_2(0) + \Delta U; \quad u_2(L_2) = u_3(0) \\ Q_i(L_i) = Q_{i+1}(0); \quad M_i(L_i) = M_{i+1}(0); \quad u_i'(L_i) = u_{i+1}'(0); \end{aligned} \quad (4)$$

Применим преобразование Фурье к обеим частям уравнений:

$$\begin{aligned} [v^4 + 4\beta_1^4] \tilde{U}_1(v) = & \frac{Q}{EI} + \frac{M}{EI}(-iv) + u_1'(0)(-iv)^2 + u_1(0)(-iv)^3 - \frac{Q_1(L_1)}{EI} e^{ivL_1} \\ & - \frac{M_1(L_1)}{EI} e^{ivL_1}(-iv) - u_1'(L_1)e^{ivL_1}(-iv)^2 - u_1(L_1)e^{ivL_1}(-iv)^3 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} [v^4 + 4\beta_1^4] \tilde{U}_2(v) = & \frac{Q_2(0)}{EI} + \frac{M_2(0)}{EI}(-iv) + u_2'(0)(-iv)^2 + u_2(0)(-iv)^3 - \frac{Q_2(L_2)}{EI} e^{ivL_2} \\ & - \frac{M_2(L_2)}{EI} e^{ivL_2}(-iv) - u_2'(L_2)e^{ivL_2}(-iv)^2 - u_2(L_2)e^{ivL_2}(-iv)^3 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} [v^4 + 4\beta_2^4] \tilde{U}_3(v) = & \frac{Q_3(0)}{EI} + \frac{M_3(0)}{EI}(-iv) + u_3'(0)(-iv)^2 + u_3(0)(-iv)^3 \\ & - u_3'(L_3)e^{ivL_3}(-iv)^2 - u_3(L_3)e^{ivL_3}(-iv)^3 \end{aligned} \quad (7),$$

где:  $4\beta_1^4 = \frac{k_1}{EI}$ ,  $4\beta_2^4 = \frac{k_2}{EI}$

В правой части уравнений (5), (6), (7) содержится вся информация о воздействии на балку: перемещение и граничные условия. Обозначим правую часть уравнений  $Q_1^{ob}(x)$ ,  $Q_2^{ob}(x)$ ,  $Q_3^{ob}(x)$  и называются их обобщенными нагрузками.

$$\begin{cases} \tilde{U}_1(v) = \frac{Q_1^{o\bar{o}}(x)}{v^4 + 4\beta_1^4} \\ \tilde{U}_2(v) = \frac{Q_2^{o\bar{o}}(x)}{v^4 + 4\beta_1^4} \\ \tilde{U}_3(v) = \frac{Q_3^{o\bar{o}}(x)}{v^4 + 4\beta_2^4} \end{cases} \quad (8)$$

Функция  $\tilde{U}_k(v)$  должна быть целой, поэтому числитель, представляющий собой сумму целых функций, должен содержать в себе нули знаменателя. Поэтому должны выполняться восемь условия:

$$\begin{cases} Q_{1,2}^{o\bar{o}}(v_{1j}) = 0 \\ Q_3^{o\bar{o}}(v_{2j}) = 0 \end{cases} \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (9),$$

где  $v_{kj}$  – корни выражения  $v^4 + 4\beta_k^4 = 0$ .

Определим корни, получим:

$$\begin{aligned} v_{k1} &= \sqrt{2}\beta_k e^{i\frac{\pi}{4}} = \beta_k(1+i); & v_{k2} &= -\sqrt{2}\beta_k e^{-i\frac{\pi}{4}} = -\beta_k(1-i); \\ v_{k3} &= -\sqrt{2}\beta_k e^{i\frac{\pi}{4}} = -\beta_k(1+i); & v_{k4} &= \sqrt{2}\beta_k e^{-i\frac{\pi}{4}} = \beta_k(1-i). \end{aligned}$$

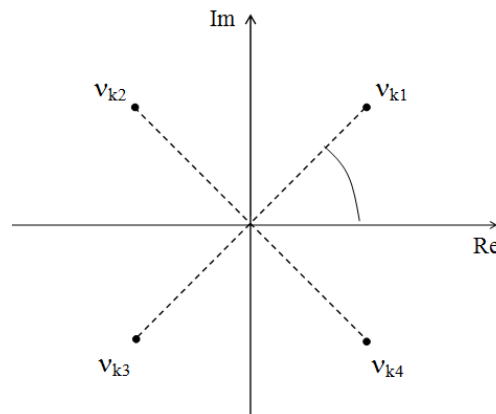


Рис. 3. Схема корни выражения  $v^4 + 4\beta_k^4 = 0$

Заместим корни  $v_{kj}$  ( $k=1,2; j=1\div 4$ ) в систему уравнения (9), получим систему 12 уравнений с 12 неизвестными:

$$[K]\{X\} = \{P\} \quad (12),$$

где:  $[K]$  – матрица коэффициентов

$\{X\}$  – вектор неизвестное

$\{P\}$  – вектор внешних обобщенных нагрузок

Решив систему уравнений (12), подставим найденные значения на границах в выражение (8). Для определения функции прогиба необходимо выполнить обратное преобразование Фурье:

$$\begin{cases} u_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_1^{o\delta}(x)}{v^4 + 4\beta_1^4} e^{-ivx} dx \\ u_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_2^{o\delta}(x)}{v^4 + 4\beta_1^4} e^{-ivx} dx \\ u_3(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_3^{o\delta}(x)}{v^4 + 4\beta_2^4} e^{-ivx} dx \end{cases} \quad (13)$$

Для вычисления интегралов выражения (13) воспользуемся теорией вычетов.

Для I-го, II-го, III-го участка:

$$u_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{Q}{EI} - \frac{M}{EI} iv - u'(0)v^2 + u(0)iv^3 - \frac{Q(L_1)}{EI} e^{ivL_1} + \frac{M(L_1)}{EI} iv e^{ivL_1} + u'(L_1)v^2 e^{ivL_1} - u(L_1)iv^3 e^{ivL_1}}{v^4 + 4\beta_1^4} e^{-ivx} dv$$

$$u_2(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{Q_2(0)}{EI} - \frac{M_2(0)}{EI} iv - u'_2(0)v^2 + u_2(0)iv^3 - \frac{Q_2(L_2)}{EI} e^{ivL_2} + \frac{M_2(L_2)}{EI} iv e^{ivL_2} + u'_2(L_2)v^2 e^{ivL_2} - u(L_2)iv^3 e^{ivL_2}}{v^4 + 4\beta_1^4} e^{-ivx} dv$$

$$u_3(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{Q_3(0)}{EI} - \frac{M_3(0)}{EI} iv - u'_3(0)v^2 + u_3(0)iv^3 + u'_3(L_3)v^2 e^{ivL_3} - u_3(L_3)iv^3 e^{ivL_3}}{v^4 + 4\beta_2^4} e^{-ivx} dv$$

Мы получим:

$$u_1(x) = \frac{u(0)e^{-\beta_1 x}}{2} \cos(\beta_1 x) + \frac{u'(0)e^{-\beta_1 x}}{4\beta_1} [\sin(\beta_1 x) - \cos(\beta_1 x)]$$

$$+ \frac{Qe^{-\beta_1 x}}{8EI\beta_1^3} [\sin(\beta_1 x) + \cos(\beta_1 x)] + \frac{Me^{-\beta_1 x}}{4EI\beta_1^2} \sin(\beta_1 x)$$

$$+ \frac{u(L_1)e^{-\beta_1(x-L_1)}}{2} \cos \beta_1(x-L_1) + \frac{u'(L_1)e^{-\beta_1(x-L_1)}}{4\beta_1} [\sin \beta_1(x-L_1) + \cos \beta_1(x-L_1)]$$

$$+ \frac{Q(L_1)e^{-\beta_1(x-L_1)}}{8EI\beta_1^3} [\sin \beta_1(x-L_1) - \cos \beta_1(x-L_1)] + \frac{M(L_1)e^{-\beta_1(x-L_1)}}{4EI\beta_1^2} \sin \beta_1(x-L_1)$$

$$u_2(x) = -\frac{[\Delta u - u(L_1)]e^{-\beta_1 x}}{2} \cos(\beta_1 x) + \frac{u'(L_1)e^{-\beta_1 x}}{4\beta_1} [\sin(\beta_1 x) - \cos(\beta_1 x)]$$

$$+ \frac{Q(L_1)e^{-\beta_1 x}}{8EI\beta_1^3} [\sin(\beta_1 x) + \cos(\beta_1 x)] - \frac{M(L_1)e^{-\beta_1 x}}{4EI\beta_1^2} \sin(\beta_1 x)$$

$$+ \frac{u(L_2)e^{-\beta_1(L_2-x)}}{2} \cos \beta_1(L_2-x) + \frac{u'(L_2)e^{-\beta_1(L_2-x)}}{4\beta_1} [-\sin \beta_1(L_2-x) + \cos \beta_1(L_2-x)]$$

$$- \frac{Q(L_2)e^{-\beta_1(L_2-x)}}{8EI\beta_1^3} [\sin \beta_1(L_2-x) + \cos \beta_1(L_2-x)] - \frac{M(L_2)e^{-\beta_1(L_2-x)}}{4EI\beta_1^2} \sin \beta_1(L_2-x)$$

$$u_3(x) = -\frac{u(L_2)e^{-\beta_2 x}}{2} \cos(\beta_2 x) + \frac{u'(L_2)e^{-\beta_2 x}}{4\beta_2} [\sin(\beta_2 x) - \cos(\beta_2 x)]$$

$$+ \frac{Q(L_2)e^{-\beta_2 x}}{8EI\beta_2^3} [\sin(\beta_2 x) + \cos(\beta_2 x)] - \frac{M(L_2)e^{-\beta_2 x}}{4EI\beta_2^2} \sin(\beta_2 x)$$

$$+ \frac{u(L_3)e^{-\beta_2(L_3-x)}}{2} \cos \beta_2(L_3-x) + \frac{u'(L_3)e^{-\beta_2(L_3-x)}}{4\beta_2} [-\sin \beta_2(L_3-x) + \cos \beta_2(L_3-x)]$$

Используя известные из теории сопротивления материалов соотношения, получим выражения момента и поперечной силы.

**Например.** Рассматриваем задачу с расчетными данными: Круговой железобетонный свай, диаметр  $d = 1$  м, упругий модуль  $E = 3,24 \cdot 10^7$  КН/м<sup>2</sup>, коэффициенты основания  $k_1 = 1 \cdot 10^5$  КН/м<sup>3</sup>,  $k_2 = 2 \cdot 10^6$  КН/м<sup>3</sup>, длины свая  $L_1 = 25$  м,  $L_2 = 22$  м,  $L_3 = 3$  м.  $Q = 0$  и  $M = 0$ ,  $\Delta U = -0,1$  м. Мы получим:

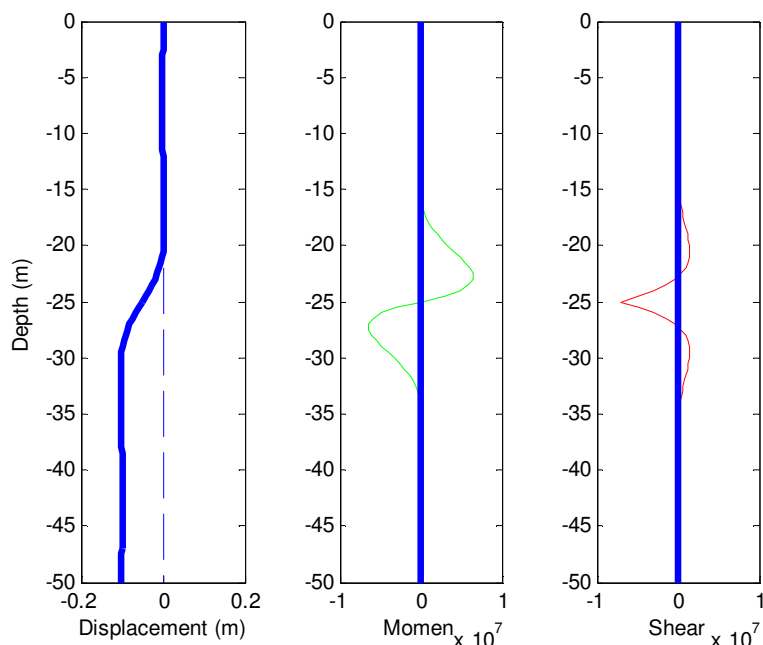


Рис. 4. Эпюры перемещения, момента и поперечной силы сваи

**Вывод.** С фундаментальной точки зрения задача была решена аналитическими методами. Однако вертикальная сила и сила трения не учитывались. Разработанная методика позволяет определить деформационные характеристики конструкции в зоне разлома.

#### Список литературы

1. Курбацкий Е. Н. Метод решения задач строительной механики и теории упругости, основанный на свойствах изображений Фурье финитных функций : дис. ... д-ра техн. наук. – М., 1995. – 205 с.
2. Александров А. В., Потапов В. Д., Державин Б. П. Сопротивление материалов. – М. : Высшая школа, 2000.
3. Купчикова Н. В. Определение коэффициента постели по деформации свободного конца сваи с использованием методики дискретного преобразования Фурье // Вестник Саратовского государственного технического университета. – 2013. – Т. 4. – № 1 (73). – С. 206–209.