АЛГОРИТМ ДЕКОМПОЗИЦИИ КРУПНОРАЗМЕРНОЙ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ПРИ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ИНВЕСТИЦИОННЫХ РЕСУРСОВ В СТРОИТЕЛЬНОЙ ОТРАСЛИ

П. Н. Садчиков
Астраханский инженерно-строительный институт,
г. Астрахань (Россия)

Из сложившейся мировой практики, говоря об инвестициях, предполагается, что речь идет о совокупных долгосрочных вложениях капитала в реализацию различных программ и проектов производственной, коммерческой, социальной, научной, культурной или какой-либо другой сферы с целью получения дохода или достижения социального или экологического эффекта, а также приобретения влияния.

Отсюда следует, что инвесторы – это субъекты инвестиционной деятельности, осуществляющие вложение собственных, заемных или привлеченных средств и обеспечивающие целевое использование этих инвестиционных вложений. Инвестиционная же деятельность, таким образом, представляет собой совокупность практических действий физических и юридических лиц по реализации инвестиций.

Системный анализ, проведенный в 1994 г. М. М. Хасановым [1], показал, что рассогласования экономических интересов в инвестиционной сфере имеют место, как по внешним, так и по внутренним причинам. Так, например, требуемой направленностью деятельности инвестора является обеспечение прироста мощностей и объектов социальной сферы для удовлетворения потребности общества в продукции определенного вида, объема и надлежащего качества. Это может быть достигнуто путем реконструкции, расширения, технического перевооружения действующих или создания новых основных фондов с целью получения инвестором дохода, обеспечивающего эффективность его деятельности.

Фактическая же направленность деятельности в основном не совпадает с требуемой, так как в структуре получаемого им дохода значительный удельный вес занимает фонд потребления при уменьшении доли фонда накопления, направляемого в инвестиции.

К причинам таковых несовпадений можно отнести:

- ненадлежащее состояние финансово-кредитного механизма;
- отсутствие четкой законодательной базы, регулирующей взаимоотношения между субъектами инвестиционной деятельности и обеспечивающей надежность вложенных средств;
- высокий уровень инфляции.

Для решения указанных проблем разработан ряд моделей распределения инвестиционных ресурсов [2]. Эти модели разобьем на четыре класса. В качестве основных задач каждого из них, соответственно, выступают:

1) определение оптимального объема инвестиций для одного объекта при неограниченных ресурсах;

2) определение оптимальной величины общей суммы инвестиций для нескольких объектов при неограниченных ресурсах;

3) выбор оптимальных объемов инвестиций при нескольких объектах, когда величина всех ресурсов меньше наименьшей величины оптимального объема инвестиций для отдельного объекта (принцип концентрации);

4) определение оптимального распределения инвестиций для нескольких объектов при ограниченных ресурсах, превышающих наименьший оптимальный объем инвестиций для отдельного объекта.

При решении приведенных задач используются методы, вытекающие из теоремы Куна – Такера, которые опираются на гипотезу о следующем виде математической модели объекта:

$$G = t_1\left[1 - e^{-t_2 F}\right], \qquad (1)$$

где G – выпуск продукции, F - объем инвестиций, t_1, t_2 – параметры модели конкретного объекта. Объекты отличаются друг от друга конкретными значениями этих параметров, и с помощью введенного автором коэффициента приоритета решается задача оптимального распределения финансовых ресурсов.

Достоинством такого подхода нам представляется близость кривой выпуска в зависимости от объемов и структуры инвестиций к логистической зависимости в фазе насыщения, но при отсутствии фазы разгона.

При управлении строительством задачу формирования решений имеет смысл свести к математической схеме линейного или нелинейного программирования в детерминированной либо стохастической постановке с тем, чтобы решить ее известными методами.

Такой подход имеет ряд преимуществ, обусловленных методологической ясностью выделения стадии постановки и решения задачи, возможностью самостоятельного развития арсенала математических средств. Но имеет и свои недостатки. Он, как правило, требует декомпозиции единого решения на комплексы задач и обусловлен трудностями при работе с большими объемами информации с ограниченными возможностями применяемых оптимизационных моделей.

Этот подход базируется на разложении исходной крупноразмерной задачи математического программирования на мелкие – локальные подзадачи-блоки, для решения которых применяются специальные методы в зависимости от их конкретной структуры.

Многие экономические задачи приводятся к виду задач, у которых матрица ограничений $Q = (q_{li})$ имеет блочный вид:

$$Q = \begin{pmatrix} X & X & . & . & . & . & . & X & X \\ X & X & . & . & . & . & . & X & X \\ X & X & X & & & & & & \\ X & X & X & & & & & & \\ & & & X & X & X & & & \\ & & & X & X & X & & & \\ & & & & & & X & X & X \\ & & & & & & X & X & X \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

где ненулевые элементы располагаются только в заштрихованных блоках матрицы.

Особенность задачи, имеющей блочную структуру, состоит в том, что в каждой паре ее подзадач отсутствуют общие переменные, а в глобальной задаче имеются общие ограничения, связывающие все локальные блоки. Эти ограничения называют дополнительными или стягивающими [3].

Предположим, что имеется *m*-мерный вектор *b*, и для каждого $i = 1..n$ – матрица A_i размером $m \times n_i$, а также матрица B_i размером $m_i \times n_i$ и $\boldsymbol{C_i}$ – n_i-мерный вектор. Найдем векторы X_i $(i = 1..n)$, удовлетворяющие следующим соотношениям:

$$
\begin{array}{l}
A_1X_1 + ... + A_iX_i + ... + A_nX_n = b \\
\left.\begin{array}{l}
B_iX_i ... \qquad\qquad\quad = b_1 \\
\qquad B_iX_i ... \qquad = b_2 \\
\qquad\qquad B_iX_i = b_n
\end{array}\right\} \\
X_1 \geq 0 ... X_i \geq 0 ... X_n \geq 0 \\
\min C = C_1X_1 + ... + C_iX_i + ... C_nX_n
\end{array} \tag{3}
$$

или

$$
C = \sum_{i=1}^{n} C_iX_i \to \min, \quad \text{при} \tag{4}
$$

$$
\begin{cases}
\sum_{i=1}^{n} A_iX_i = b \\
B_iX_i = b_i \\
X_i \geq 0
\end{cases} \tag{5}
$$

Можно доказать, что существуют такие векторы: :

$$
x_{ij} \geq 0; \left\{\begin{array}{l} i = 1..n \\ j = 1..k_i \end{array}\right\}; \quad
y_{ij} \geq 0; \left\{\begin{array}{l} i = 1..n \\ j = 1..l_i \end{array}\right\}, \tag{6}
$$

с помощью которых векторы X_i выражаются следующим образом:

$$
X_i = \sum_{j=1}^{k_i} s_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{l_i} t_{ij}y_{ij}; \quad i = 1..n, \tag{7}
$$

$$
\begin{array}{l}
\text{где} \quad \sum_{j=1}^{k_i} s_{ij} = 1; \quad i = 1..n; \\
s_{ij} \geq 0; \quad i = 1..n, \quad j = 1..k_i \\
t_{ij} \geq 0; \quad i = 1..n, \quad j = 1..l_i
\end{array} \tag{8}
$$

Векторы X_i является допустимыми планами частных подзадач:

$$
\begin{array}{l}
\begin{cases}
B_iX_i = b_i; \quad i = 1..n \\
X_i \geq 0; \qquad i = 1..n
\end{cases} \\
C = C_iX_i \to \min.
\end{array} \tag{9}
$$

Поэтому их можно представить в виде выпуклой линейной комбинации крайних точек множества S_i *(i=1,...,n)*:

$$S_i = \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} s_{ij}; \qquad i = 1..n, \tag{10}$$

где числа s_{ij} удовлетворяют ограничениям.

Пусть для каждого $i = 1..n$ векторы X_{ij} определены. Тогда поскольку векторы X_i должны удовлетворять первому условию системы (4), подставляя в него выражение (7), видим, что это равенство эквивалентно следующему:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} A_i x_{ij} s_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l_i} A_i y_{ij} t_{ij} = b. \tag{11}$$

Обозначая $p_{ij} = A_i x_{ij}$ и $Q_{ij} = A_i y_{ij}$, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} p_{ij} s_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l_i} Q_{ij} t_{ij} = b \tag{12}$$

Проделаем аналогичные преобразования и с функционалом (5), т.е. подставим в него выражение (7). В результате получим:

$$\min C = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} C_i x_{ij} s_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l_i} C_i y_{ij} t_{ij} \tag{13}$$

Обозначая $c_{ij} = C_i x_{ij}$ и $c_{ij}^{/} = C_i y_{ij}$, найдем

$$\min C = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij} s_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l_i} c_{ij}^{/} t_{ij} \tag{14}$$

В результате проведенных преобразований исходная задача (4)–(5) с $m + \sum_{i=1}^{n} m_i$ -ограничениями и $\sum_{i=1}^{n} n_i$ -переменными сводится к следующей ей эквивалентной угловой задаче:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{i=1}^{n} p_{ij} s_{ij} + \sum_{j=1}^{l_i} \sum_{i=1}^{n} Q_{ij} t_{ij} = b \\ \sum_{j=1}^{\mathrm{k_i}} s_{ij} = 1; \qquad i = 1..n; \\ s_{ij} \geq 0; \qquad i = 1..n, \qquad j = 1..k_i \\ t_{ij} \geq 0; \qquad i = 1..n, \qquad j = 1..l_i \end{cases} \tag{15}$$

$$\min C = \sum_{j=1}^{k_i} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} s_{ij} + \sum_{j=1}^{l_i} \sum_{i=1}^{n} c_{ij}^{/} t_{ij} \tag{16}$$

Таким образом, m общих ограничений исходной задачи перешли в m ограничений (12) угловой задачи, а m_i ограничений частных подзадач пеперешли в единственное ее ограничение (8). Очевидно, что если числа m_i достаточно велики, то уменьшение общего числа ограничений будет довольно значительным. Именно этот факт определяет вычислительную эффективность метода декомпозиции. Однако уменьшение ограничений достигнуто за счет увеличения числа переменных (вместо $\sum_{i=1}^{n} n_i$ - переменных в исходной задаче имеем $\sum_{i=1}^{n} k_i + \sum_{i=1}^{n} l_i$ -переменных в угловой задаче).

Разработанный метод не представлял бы большого интереса, если бы не было возможности эффективно уменьшить число полученных переменных. Оказывается, что активную роль в ходе реализации задачи играет лишь небольшая часть $\sum_{i=1}^{n} k_i + \sum_{i=1}^{n} l_i$ -переменных. А элементы, необходимые для получения этих переменных, можно образовывать по мере необходимости.

Связь угловой задачи с исходной формулируется в виде следующей леммы:

Если числа s_{ij}, при $i = 1..n$, $j = 1..k_i$ реализуют угловую задачу (8), (12), (14), то векторы $S_i = \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} s_{ij}$ решают исходную задачу (3).

Эта лемма используется для получения всех решений исходной задачи, когда определены все решения угловой задачи.

Основная идея представленного метода декомпозиции заключается в том, что задача (8), (12), (14), как и общая задача математического программирования, может быть решена любым симплекс-методом без предварительной подготовки всех данных, участвующих в ее подстановке.

Однако необходимо обратить внимание на тот факт, что когда речь идет о крупномасштабных моделируемых процессах, затрагивающих финансовые интересы всех сторон-участников инвестиционной деятельности и общества в целом, их эффективность не может быть полностью охарактеризована с помощью одного единственного показателя, что ведет к многокритериальности в постановке исходной задачи.

Литература

1. Хасанов, М. М. Системный анализ инвестиционной деятельности / М. М. Хасанов. – М. : Гардарики, 1994. – 243 с.
2. Пыки, Т. Программирование оптимального распределения капиталовложений / Т. Пыки. – М. : Прогресс, 1974. – 218 с.
3. Широков, Б. М. Экономико-математические модели и методы оптимизации планирования в строительстве / Б. М. Широков. – М. : Стройиздат, 1976. – 177 с.