

РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН НАПРЯЖЕНИЙ В ГРАНУЛИРОВАННЫХ СРЕДАХ

Е. Н. Курбацкий, О. А. Голосова

*Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ),
г. Москва (Россия)*

Во многих случаях фундаменты сооружений и подземные сооружения располагаются в несвязных грунтах. Поэтому исследования распространения волн в таких грунтах представляют большой научный и практический интерес. Такие исследования необходимы для более точной оценки воздействия сейсмических волн на сооружения, а так же при разработке сейсмо и виброзащитных устройств. Одной из хорошо исследованных моделей является среда, состоящая из прижатых друг к другу упругих сфер (например: песчинок), в которой появляются дополнительные напряжения вследствие распространения в среде упругих волн. Такие модели многократно проверены многими исследователями в натуральных условиях. Результаты полевых испытаний показали, что теоретические модели гранулированных сред, состоящие из упакованных сфер, хорошо описывают распространение сейсмических волн в рыхлых неконсолидированных средах.

В последнее время усилия многих исследователей направлены на создания моделей гранулированных сред, состоящих из частиц различных форм и размеров, упакованных случайным образом. На кафедре «Подземные сооружения» МИИТа исследуются динамические свойства искусственной среды, состоящей из смеси гранул полимерного материала (полиэтилена) и песка. Размеры гранул полимерного материала значительно больше диаметров песчинок. Целью исследований является разработка сыпучей среды, обладающей определенными свойствами, для использования ее в качестве сейсмоизолирующих и виброизолирующих слоев.

Рассмотрим распространение продольных и поперечных волн в гранулированных средах: в природной среде (песок) и искусственной (гранулы из полимерного материала с песком). Возможны различные виды упаковок сфер. Этот вопрос интересовал многих ученых. В частности известен спор Ньютона с шотландским астрономом Джеймсом Грегори. Мы будем рассматривать простую упаковку. Схема расположения сфер в кубическом элементе пористых сред представлена на рис. 1.

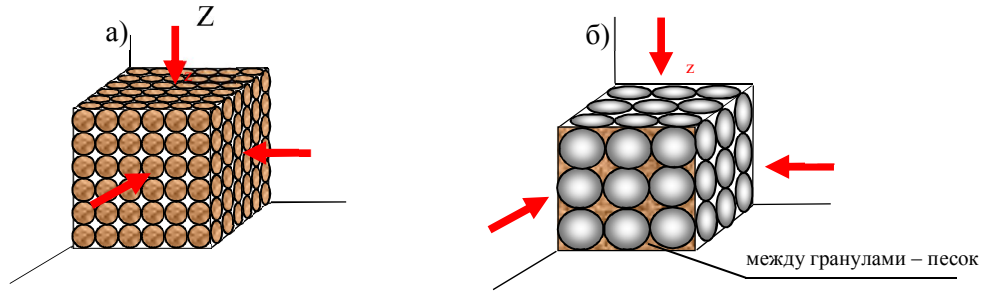


Рис. 1. Элементарные объемы природной (а) и искусственной (б) сред

При рассмотрении искусственных сред будем считать, что песчинки заполняют пустоты между гранулами полиэтилена. Сначала рассмотрим, среду, состоящую из сфер одинаковых размеров и одинакового материала.

Будем полагать, что в начальном состоянии на каждую грань элементарного объема действует нормальное напряжение, среднюю величину которого обозначим \bar{p} . При распространении волн напряжений на действующие напряжения накладываются дополнительные напряжения, которые деформируют сферы в точках соприкосновения. Деформации упругих сфер при действии этих дополнительных напряжений можно определить, используя теорию контактных напряжений Герца.

Выберем систему координат таким образом, чтобы ряды упругих сфер были расположены параллельно координатным осям.

Если обозначить буквой r_s радиус сферы, величина силы, приходящейся на каждую грань элементарного объема среды, определяется выражением: $P_{\text{сум}} = 4n^2 r_s^2 \bar{p}$, тогда, сила, действующая на каждый ряд сфер, будет равна $P_{\text{сум}} = 4r_s^2 \bar{p}$.

Под действием двух одинаковых сил, приложенных к сферам, в соответствии с теорией Герца в зоне их контакта образуется площадка радиуса b (рис. 2):

$$b = \left[\frac{3r_s(1-\nu_s^2)P}{4E_s} \right]^{1/3}, \quad (1)$$

центры сфер сближаются на величину δ :

$$\delta = \left[\frac{9(1-\nu_s^2)^2 P^2}{2E_s^2 r_s} \right]^{1/3}, \quad (2)$$

где E_s и ν_s – упругие константы материала сфер.

На площадку контакта действуют напряжения, интенсивность которых определяется выражением:

$$P_N = -\frac{3P}{2\pi b^2} \left(1 - \frac{r^2}{b^2} \right)^{1/2}. \quad (3)$$

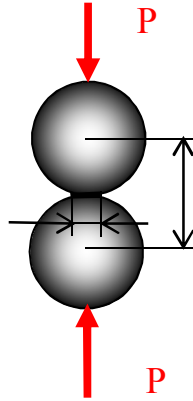


Рис. 2. Зона контакта двух сфер

Для определения скоростей распространения упругих волн в гранулированных средах, упругие константы определяются как отношения средних напряжений к средним деформациям. Уравнения (1) и (2) позволяют определять скорости распространения продольных волн в направлении любой из координатных осей.

При возрастании действующих на две соседние сферы сил, на величину $\Delta P = -4r_s^2 \tilde{p}_{xx}$, расстояние между центрами сфер уменьшится на величину $\Delta \delta$, тогда средняя деформация определится выражением:

$$\tilde{\varepsilon}_{xx} = -\frac{\Delta \delta}{2r_s}. \quad (4)$$

Отношение средних напряжений к средним деформациям имеет вид:

$$\frac{\tilde{p}_{xx}}{\varepsilon_{xx}} = \frac{\Delta P}{2r_s \Delta \delta}. \quad (5)$$

Для определения соотношений между приращениями средних напряжений и средних деформаций, которые появляются при распространении волн в гранулированной среде, можно воспользоваться зависимостью (2), представив ее в виде:

$$\Delta \delta = \frac{d\delta}{dP} \Delta P. \quad (6)$$

Выполнив дифференцирование и необходимые преобразования, получим:

$$\frac{\Delta P}{\Delta \delta} = \left[\frac{3E^2 r_s P}{4(1-\nu_s^2)^2} \right]^{1/3}. \quad (7)$$

В механике грунтов более удобным является использование модуля сдвига. В таком случае выражение (7) можно представить в другой форме:

$$\frac{\Delta P}{\Delta \delta} = \frac{2\mu_s b}{1-\nu_s}. \quad (8)$$

Используя определения средних напряжений и средних деформаций и соотношение (7), можно получить модуль упругости для гранулированных сред:

$$\tilde{E} = \frac{\tilde{p}_{xx}}{\tilde{\varepsilon}_{xx}} = \left[\frac{3E_s^2 P}{32(1-\nu_s^2)^2 r_s^2} \right]^{1/3} = \left[\frac{3E_s^2 P}{8(1-\nu_s^2)^2} \right]^{1/3}. \quad (9)$$

Осредненную плотность среды можно найти, разделив массу сферы на объем куба, в который она вписывается, имеем:

$$\tilde{\rho} = \frac{4\pi r_s^3}{3 \cdot 8r_s^3} \rho_s = \frac{\pi \rho_s}{6}, \quad (10)$$

где ρ_s – плотность материала.

Скорость распространения продольных волн в гранулированной среде, сложенной из одинаковых сфер, нагруженных давлением \tilde{p} , вдоль оси, проходящей через точки контакта сфер, определяется выражением:

$$\alpha_p = \left[\frac{3E_s^2 \tilde{p}}{8(1-\nu_s^2)^2} \right]^{1/6} \cdot \left[\frac{6}{\pi \rho_s} \right]^{1/2} = \left[\frac{3^4 E_s^2 \tilde{p}}{\pi^3 \rho_s^3 (1-\nu_s^2)^2} \right]^{1/6}. \quad (11)$$

Как следует из анализа последнего выражения, скорости распространения продольных волн возрастают пропорционально корню шестой степени давления в грунтовом массиве, что достаточно хорошо соответствует экспериментам, выполненным в полевых условиях.

При анализе распространения поперечных волн необходимо учитывать касательные силы в точках соприкосновения деформируемых сфер.

Также как и в предыдущем случае будем полагать, что в начальном состоянии на каждую грань элементарного объема действует нормальное напряжение, среднюю величину которого обозначим \tilde{p} . При распространении поперечных волн в направлении оси Y необходимо рассмотреть средние перемещения, параллельные оси X, и средние деформации $\tilde{\varepsilon}_{xy} = \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial y}$.

Обозначим приращения касательной силы, действующей в зоне контакта двух сфер:

$$\Delta T = 4r_s^2 \tilde{p}_{xy}. \quad (12)$$

В результате действия такой силы между центрами сфер появляется относительное смещение $\Delta \delta_T$ (рис. 3).

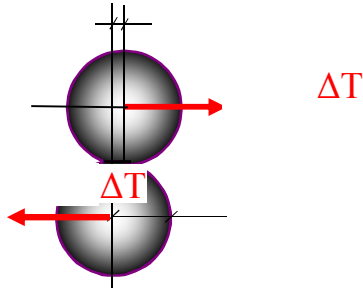


Рис. 3. Относительное смещение под действием сдвигающей силы ΔT

Как следует из работы Миндлина [1], отношение приращения силы, к вызванному этим приращением перемещению, аналогичное уравнению (7), можно представить в виде:

$$\frac{\Delta T}{\Delta \delta_T} = \frac{[6(1-\nu_s^2)^2 E_s^2 r_s T]^{1/3}}{(2-\nu_s)(1+\nu_s)}. \quad (13)$$

Выражая модуль упругости через модуль сдвига и коэффициент Пуассона, а так же используя выражение для радиуса контактной площадки, уравнение (13) можно представить в виде:

$$\frac{\Delta T}{\Delta \delta_T} = \frac{4\mu_s b}{2-\nu_s}. \quad (14)$$

Для определения модуля сдвига необходимо определить отношение средних напряжений к средним деформациям сдвига. Для этой цели, следуя работе Миндлина [1], рассмотрим элемент гранулированной среды, подверженной деформации, аналогичной деформации простого сдвига сплошной среды (рис. 4).

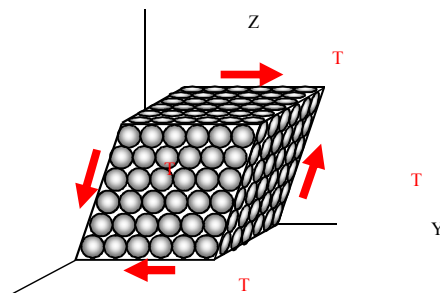


Рис. 4. Гранулированная среда, подверженная деформации простого сдвига

На каждую сферу действуют две горизонтальные силы со стороны верхней и нижней соседних сфер. Эти силы вызывают вращение рассматриваемой сферы по ходу часовой стрелки, пока не возникает пара сил с моментом противоположного знака, создаваемого вертикальными контактными силами со стороны соседних горизонтальных сфер. На каждую сферу действуют четыре силы. Относительные перемещения при поступа-

тельном движении сфер в каждой точке контакта равны $\Delta\delta_T$. Кроме того, все сферы поворачиваются на угол $\Delta\varphi = \frac{\Delta\delta_T}{2r_s}$.

Рассмотрим вертикальные перемещения горизонтального среднего ряда сфер относительно крайней левой сферы (рис. 5). Средняя сфера перемещается поступательно вверх относительно левой сферы на величину $\Delta\delta_T$ и поворачивается по ходу часовой стрелки на угол $\Delta\varphi$. Учитывая, что крайняя левая сфера так же поворачивается по ходу часовой стрелки на такой же угол, точка контакта сфер опускается относительно центра левой сферы на величину $\frac{\Delta\delta_T}{2}$. Заметим, что центр средней сферы останется на горизонтальной линии, проходящей через центр левой сферы. Таким же образом можно обосновать, что при таком характере деформаций центры всех сфер не смещаются относительно горизонтальной оси X .

Рассмотрим горизонтальные перемещения сферы среднего ряда относительно нижней сферы (рис. 5). Горизонтальное перемещение средней сферы относительно нижней – $\Delta\delta_T$. Перемещение точки контакта нижней сферы со средней сферой вследствие вращения нижней сферы по ходу часовой стрелки на угол $\Delta\varphi$ составляет $\frac{\Delta\delta_T}{2}$. Горизонтальное перемещение центра средней сферы при вращении ее вокруг точки контакта на угол $\Delta\varphi$ также равно $\frac{\Delta\delta_T}{2}$.

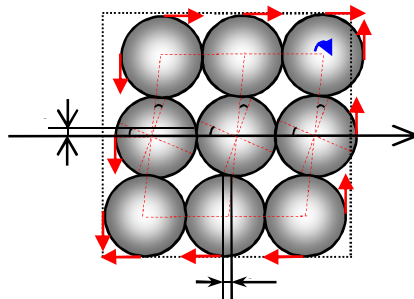


Рис. 5. Вертикальные перемещения среднего ряда сфер относительно крайней левой сферы и горизонтальные перемещения сфер относительно нижней сферы

Таким образом, суммарное перемещение центра средней сферы относительно центра нижней сферы равно $2\Delta\delta_T$. Горизонтальное перемещение центра верхней сферы относительно центра нижней сферы так же равно $2\Delta\delta_T$. Отсюда следует, что средние деформации определяются выражением:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{2\Delta\delta_T}{2r_s} = \frac{\Delta\delta_T}{r_s}. \quad (15)$$

Используя выражения для средних напряжений деформаций и соотношение (13), можно получить выражение для определения модуля сдвига для гранулированных сред:

$$\bar{\mu}_s = \frac{\bar{P}_{xy}}{\bar{\varepsilon}_{xy}} = \frac{[6(1-\nu_s^2)^2 E_s^2 r_s T]^{1/3}}{4r_s(2-\nu_s)(1+\nu_s)} = \frac{[3(1-\nu_s^2)^2 E_s^2 \bar{p}]^{1/3}}{2(2-\nu_s)(1+\nu_s)}. \quad (16)$$

Используя усредненную плотность среды и полученный усредненный модуль сдвига, найдем скорость поперечных волн в гранулированной среде:

$$\begin{aligned} \beta_s &= \sqrt{\frac{\bar{\mu}_s}{\bar{\rho}}} = [3(1-\nu_s^2)^2 E_s^2 \bar{p}]^{1/6} \cdot \left[\frac{1}{2(2-\nu_s)(1+\nu_s)} \right]^{1/2} \cdot \left[\frac{6}{\pi \rho_s} \right]^{1/2} = \\ &= [3(1-\nu_s^2)^2 E_s^2 \bar{p}]^{1/6} \cdot \left[\frac{3}{\pi \rho_s (2-\nu_s)(1+\nu_s)} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (17)$$

В формулах (11) и (17) обозначим:

$$\begin{aligned} A_p &= \left[\frac{3^4 E_s^2}{\pi^3 \rho_s^3 (1-\nu_s^2)^2} \right]^{1/6} - \text{для волн сжатия,} \\ A_s &= [3(1-\nu_s^2)^2 E_s^2]^{1/6} \cdot \left[\frac{3}{\pi \rho_s (2-\nu_s)(1+\nu_s)} \right]^{1/2} - \text{для сдвиговых волн.} \end{aligned}$$

Тогда можно записать следующие выражения определения скоростей волн сжатия и сдвига в зависимости от вертикального давления:

$$\alpha_p = A_p \sqrt[6]{\bar{p}} \quad \text{и} \quad \beta_s = A_s \sqrt[6]{\bar{p}} \quad (18)$$

Если предположить, что предварительное нагружение обусловлено собственным весом вышележащих слоев грунта и весом сооружения на поверхности, тогда величина среднего давления будет определяться выражением: $\bar{p} = \bar{\rho}gH + P(H)$, где g – ускорение свободного падения, H – расстояние от поверхности грунта, $P(H)$ – давление от сооружения на глубине H . Из формул (18) следует, что скорости распространения продольных и поперечных волн пропорциональны корню шестой степени от давления.

Для оценки реалистичности моделей сплошных (гранулированных) сред выполнено сравнение теоретически полученных скоростей распространения продольных и поперечных волн со скоростями распространения волн, измеренных в полевых или лабораторных условиях.

На рис. 6 представлено сравнение значений скоростей распространения волн напряжений природной и искусственной сред с учетом и без учета давления на свободной поверхности, полученных теоретическим путем, с результатами измерений скоростей распространения волн между скважинами в неконсолидированных песках [3].

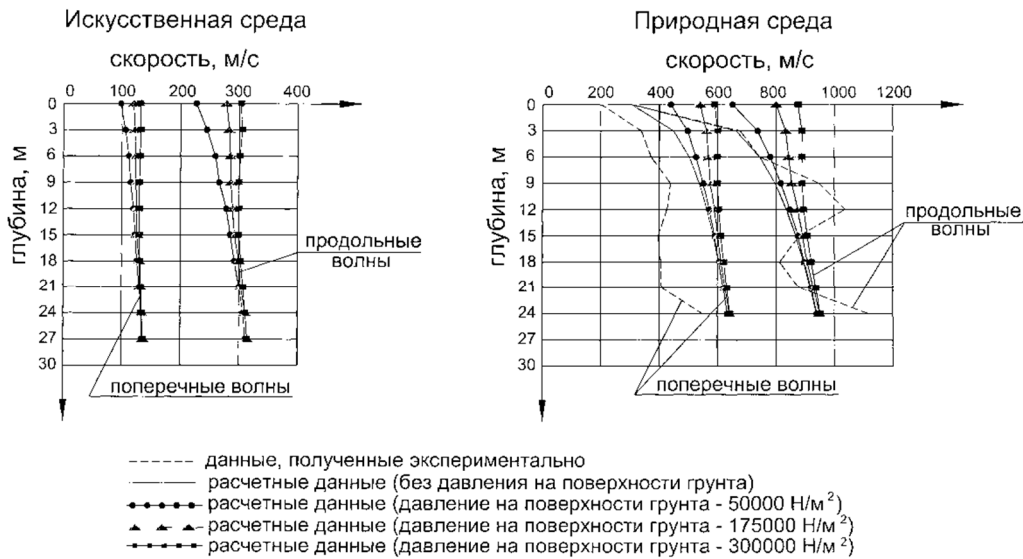


Рис. 6. Скорости распространения волн напряжений в зависимости от глубины в гранулированных средах

Для сравнения скоростей распространения волн напряжений, полученных теоретических путем, с экспериментальными данными использовались следующие характеристики материалов:

$$\bar{\rho} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} \rho_s - \text{усредненная плотность гранулированной среды,}$$

$\bar{p} = \bar{\rho}gH + P(H)$ – усредненное давление в грунте от собственного веса грунта и сооружения,

$$\rho_{s1} = 2650 \text{ кг/м}^3 - \text{плотность песчинок кварцевого песка,}$$

$$\rho_{s2} = 1800 \text{ кг/м}^3 - \text{плотность гранул из полимерного материала,}$$

$$E_{s1} = 10^{11} \text{ Н/м}^2 - \text{модуль упругости кварца,}$$

$$E_{s2} = 20,8 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2 - \text{модуль упругости гранул из полимерного материала,}$$

$$\nu_{s1} = 0,15 - \text{коэффициент Пуассона для песка,}$$

$$\nu_{s2} = 0,4 - \text{коэффициент Пуассона для гранул из полимерного материала.}$$

Анализ теоретических и экспериментальных результатов показывает хорошее совпадение для продольных волн. Замеренные скорости распространения поперечных волн значительно меньше теоретических значений.

Скорости распространения продольных и поперечных волн, определенные с использованием выражений (18), получаются следующие:

- $\alpha_{p1} = 107\sqrt[6]{\bar{p}}$ и $\beta_{s1} = 72\sqrt[6]{\bar{p}}$ (для кварцевого неконсолидированного песка);

- $\alpha_{p2} = 37\sqrt[6]{\bar{p}}$ и $\beta_{s2} = 16\sqrt[6]{\bar{p}}$ (для гранул из полимерного материала с песком).

Заметим, что при учете давления от сооружения на поверхности грунта скорости продольных и поперечных волн увеличиваются.

В заключение отметим, что модели сред, состоящие из одинаковых сфер, как отмечается многими исследователями, достаточно хорошо описывают поведение неконсолидированных сред при распространении в них низко частотных упругих волн.

Скорости распространения волн напряжений в искусственных средах, состоящих из смеси полиэтиленовых гранул и песка значительно меньше, скоростей распространения волн в природной (песчаной) среде. Из этого следует, что слои из такого материала можно использовать как для уменьшения сейсмических воздействий на сооружения, так и для защиты от техногенных вибраций.

Литература

1. Mindlin, R. D. Compliance of Elastic Bodies in Contact / R. D. Mindlin // J. Appl. Mech., Trans. ASME. – 1949. – Vol. 71. – P. 259–268.
2. Duffy, J. Stress-Strain Relations and Vibrations of a Granular Medium / J. Duffy and R. D. Mindlin // J. Appl. Mech. – 1957. – Vol. 24. – P. 585–593.
3. White, J. E. Velocity Measurements in Near-surface Formations / J. E. White and R. L. Sengbush // Geophysics. – 1953. – Vol. 18. – P. 54–69.
4. Шериф, Р. Сейсморазведка : в 2 т. Т. 2. : пер. с англ. / Р. Шериф, Л. Гелдарт. – М. : Мир, 1987. – 400 с.