ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПОСТЕЛИ ПО ДЕФОРМАЦИИ СВОБОДНОГО КОНЦА СВАИ С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЯХ

Е. Н. Курбацкий
Московский государственный университет путей сообщения (МИИТ), г. Москва (Россия)
Н. В. Купчикова
Астраханский инженерно-строительный институт, г. Астрахань (Россия)

Для достаточно длинных свай, когда влияние граничных условий на нижнем конце сваи можно пренебречь, сваю можно рассматривать как полубесконечную

$$\frac{d^4u}{dx^4} + 4\beta^4 u = u'''(0)\delta(x) + u''(0)\delta'(x) + u'(0)\delta''(x) + u(0)\delta'''(x) \qquad (1)$$

Учитывая граничные условия для балки со свободным концом:

$u'''(0) = -\dfrac{P}{EI}$; $u''(0) = \dfrac{M}{EI} = 0$; имеем:

$$\frac{d^4u}{dx^4}+4\beta^4u=\frac{P}{EI}\delta(x)+u'(0)\delta''(x)+u(0)\delta'''(x)$$

Применим преобразование Фурье к обеим частям уравнения:

$$\tilde{u}(\nu)\left[(-i\nu)^4+4\beta^4\right]=\frac{P}{EI}+u'(0)(-i\nu)^2+u(0)(-i\nu)^3.$$

Изображение Фурье функции прогиба балки имеет вид:

$$\tilde{u}(\nu)=-\frac{u'(0)\nu^2-u(0)i\nu^3-\dfrac{P}{EI}}{\nu^4+4\beta^4} \tag{2}$$

Параметры $u'(0)$ и $u(0)$ – аналогичны константам интегрирования, которые можно определить, не выходя из области изображений. Для этой цели найдем корни знаменателя $\nu^4+4\beta^4=0$:

$$\begin{aligned}&\nu_1=\sqrt{2}\beta e^{i\frac{\pi}{4}}=\beta(1+i); \qquad \nu_2=-\sqrt{2}\beta e^{-i\frac{\pi}{4}}=-\beta(1-i);\\&\nu_3=-\sqrt{2}\beta e^{i\frac{\pi}{4}}=-\beta(1+i); \qquad \nu_4=\sqrt{2}\beta e^{-i\frac{\pi}{4}}=\beta(1-i).\end{aligned} \tag{3}$$

Учитывая, что функция $u(x)\equiv 0$ при $x<0$, изображение Фурье этой функции $\tilde{u}(\nu)$ должна быть аналитической функцией во всех точках верхней полуплоскости. Из чего следует, что корни знаменателя, лежащие в верхней полуплоскости должны совпадать с корнями числителя. Из этого условия следуют два уравнения:

$$u'(0)\nu_1^2-u(0)i\nu_1^3-\frac{P}{EI}=0;\ u'(0)\nu_2^2-u(0)i\nu_2^3-\frac{P}{EI}=0.$$

Подставляя в систему уравнений выражения корней знаменателя,

$$\nu_1=\sqrt{2}\beta e^{i\frac{\pi}{4}}=\beta(1+i) \quad \text{и} \quad \nu_2=-\sqrt{2}\beta e^{-i\frac{\pi}{4}}=-\beta(1-i) \tag{4}$$

получим:

$$\begin{aligned}&u'(0)\nu_1^2-u(0)i\nu_1^3-\frac{P}{EI}=0\\&u'(0)\nu_2^2-u(0)i\nu_2^3-\frac{P}{EI}=0\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}&iu'(0)-\sqrt{2}iu(0)\beta e^{3i\frac{\pi}{4}}=\frac{P}{2\beta^2EI}\\&-iu'(0)+\sqrt{2}iu(0)\beta e^{-3i\frac{\pi}{4}}=\frac{P}{2\beta^2EI}\end{aligned} \tag{6}$$

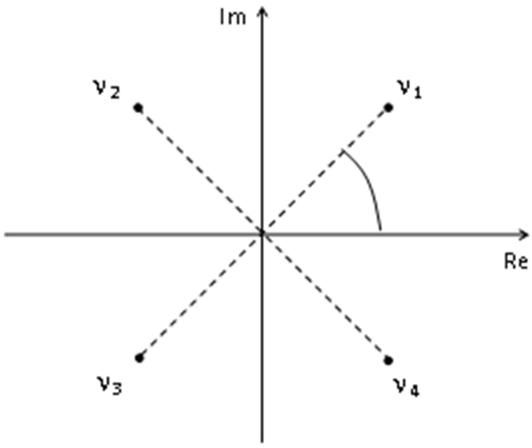

Рис. 1. Расположение корней на комплексной плоскости

Складывая левые и правые части уравнений, получим:

$$u(0)\left[\frac{e^{-3i\frac{\pi}{4}}-e^{3i\frac{\pi}{4}}}{2i}\right]\sqrt{2}=\frac{P}{2\beta^3 EI} \tag{7}$$

$$u(0)\sqrt{2}\sin 3\frac{\pi}{4}=\frac{P}{2\beta^3 EI}\Rightarrow u(0)=\frac{P}{2\beta^3 EI} \tag{8}$$

Для определения угла поворота подставим поученное выражение для прогиба в уравнение:

$$iu'(0)-\sqrt{2}i\frac{P}{2\beta^3 EI}\beta e^{3i\frac{\pi}{4}}-\frac{P}{2\beta^2 EI}=0 \tag{9}$$

Выполнив необходимые алгебраические преобразования, получим:

$$u'(0)=-\frac{P}{2\beta^2 EI} \tag{10}$$

При x=0 $u(0)=-\frac{P}{2EI\beta^3}$ (11); $\beta=\sqrt[3]{\frac{P}{2uEI}}$ (12); $\beta=\sqrt[4]{\frac{k}{4EI}}$ (13)

Из уравнений (12, 13) получаем коэффициент постели основания для полубесконечной балки:

$$k=4EI\sqrt[3]{\left(\frac{P}{u}\frac{1}{2EI}\right)^4} \tag{14}$$