

# ПОСТРОЕНИЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ВИДЕ ОБОБЩЕННЫХ ФИНИТНЫХ ФУНКЦИЙ

*Сан Лин Тун*

*Technological Academy (Союз Мьянмы)*

Разработана методика, используемая для построения конечных элементов для решения задач теории упругости. Уравнения теории упругости представляются в обобщенных финитных функциях для тел ограниченных размеров. К полученным уравнениям применяется преобразование Фурье. Для определения соотношений между напряжениями и перемещениями на гранях элемента используется теорема о граничных функциях. Для автоматизированного ввода исходных данных разработан алгоритм определения геометрических параметров многоугольника.

Ниже приведены основные формулы, необходимые для построения конечного элемента.

Рассмотрим упругое тело, занимающее ограниченную выпуклую область  $\Omega$ , на интервале  $[0, T]$  под действием сил  $\mathbf{f}_i$  в обобщенных финитных функциях:

$$\begin{aligned} U_i(x, t) &= \{U_i(x_1, x_2, x_3)\} \theta(\Omega) \theta(T); \\ U_i(x, t) &\equiv 0, x \notin \Omega \text{ и } t \notin [0, T]; \end{aligned} \quad (1)$$

Представим закон Гука и уравнения движения теории упругости в обобщенных финитных функциях:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,i} - \rho \ddot{U}_j &= -F_j + [\sigma_{ij}]_s \cos(\bar{n} \times x_i) \delta_s - \rho [U_j]_{t=0} \dot{\delta}(t) + \rho [U_j]_{t=T} \dot{\delta}(t - T) \\ &\quad - \rho [\dot{U}_j]_{t=0} \delta(t) + \rho [\dot{U}_j]_{t=T} \delta(t - T) \\ \lambda \delta_{ij} (U_{k,k}) + \mu (U_{i,j} + U_{j,i}) - \sigma_{ij} &= \lambda \delta_{ij} [U_k]_s \cos(\bar{n} \times x_k) \delta_s + \mu [U_i]_s \cos(\bar{n} \times x_j) \delta_s \\ &\quad + \mu [U_j]_s \cos(\bar{n} \times x_i) \delta_s \end{aligned} \quad (2)$$

$$\quad (3)$$

Подставляя уравнение (2) в уравнение (3), получим:

$$\begin{aligned} \mu U_{j,ii} + (\lambda + \mu) U_{i,jj} - \rho \ddot{U}_j &= -F_j + [\sigma_{ij}]_s \cos(\bar{n} \times x_i) \delta_s + \lambda \{ [U_j]_s \cos(\bar{n} \times x_i) \delta_s \}_j \\ &\quad + \mu \{ [U_i]_s \cos(\bar{n} \times x_j) \delta_s \}_i + \mu \{ [U_j]_s \cos(\bar{n} \times x_i) \delta_s \}_i \\ &\quad - \rho [U_j]_{t=0} \dot{\delta}(t) + \rho [U_j]_{t=T} \dot{\delta}(t - T) \\ &\quad - \rho [\dot{U}_j]_{t=0} \delta(t) + \rho [\dot{U}_j]_{t=T} \delta(t - T) \end{aligned} \quad (4)$$

Обозначив правую часть уравнения (4) через  $X_j$ , получим

$$\mu U_{j,ii} + (\lambda + \mu) U_{i,jj} - \rho \ddot{U}_j = X_j \quad (5)$$

**Уравнения теории упругости в обобщенных функциях для тел ограниченных размеров в области изображений Фурье.**

При интегрировании используются следующие свойства преобразования Фурье:  $\frac{\partial U_k}{\partial x_j} \Rightarrow (-iv_j)\bar{U}_k$  или в тензорных обозначениях  $U_{k,j} \Rightarrow (-iv_j)\bar{U}_k$  и

$\ddot{U}_k \Rightarrow -\omega^2 \tilde{U}_k$  Применим преобразование Фурье по всем переменным к уравнениям (5):

$$[v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - \eta^2 \omega^2] \bar{U}_i + (\eta^2 - 1) \bar{U}_j v_i v_j = \frac{\bar{X}_i}{\mu} \quad (6)$$

Решая систему алгебраических уравнений (6) относительно неизвестных функций, получим:

$$\bar{U}_i = \frac{\eta^2 (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - \omega^2) \bar{X}_i + (\eta^2 - 1) \bar{X}_j v_i v_j}{\rho c_1 (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - \eta^2 \omega^2) (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - \omega^2)} \quad (7)$$

**Уравнения теории упругости для плоского четырехгранного элемента в обобщенных финитных функциях.**

Представим реализацию метода на примере плоской задачи теории упругости.

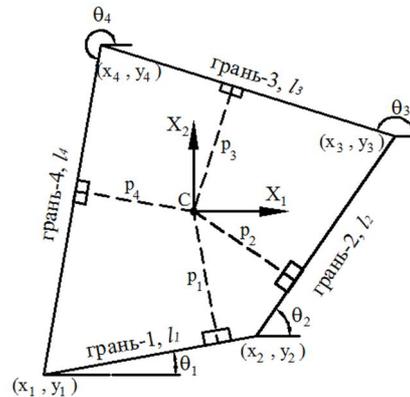


Рис. 1. Общий вид четырехгранного элемента

Разделим упругое тело (в общем случае неоднородное) на элементы с границами любой ориентации, в пределах которых характеристики упругой среды можно считать постоянными.

Воспользовавшись уравнения (4), (5), (6) и (7), запишем общие уравнения теории упругости для произвольного плоского четырехгранного элемента рис.2 в обобщенных финитных функциях:

$$\bar{U}_i = \frac{\eta^2 (v_1^2 + v_2^2 - \omega^2) \bar{X}_i + (\eta^2 - 1) \bar{X}_j v_i v_j}{\rho c_1 (v_1^2 + v_2^2 - \eta^2 \omega^2) (v_1^2 + v_2^2 - \omega^2)}; i = 1, 2. \quad (8)$$

Если размеры элементов малы по сравнению с длиной волны при разложении изображений Фурье в степенной ряд будет удерживаться один член ряда. Полагая в уравнениях (8) сначала  $v_1 = 0$ , затем  $v_2 = 0$  и приравнявая числители нулю на корнях знаменателей, получим уравнения (10), выражающие соотношения между интегралами перемещений и напряжений на гранях элемента. Отметим, что

$$\tilde{U}(v) = \int_{-a}^a u(x) dx - iv \int_{-a}^a xu(x) dx + \frac{(-iv)^2}{2} \int_{-a}^a x^2 u(x) dx + \dots \Rightarrow \tilde{U}(0) = \int_{-a}^a u(x) dx \quad (9)$$

$$\begin{array}{l}
1 \quad (\phi_{12}^2 p_1 - \phi_{11}^2 p_1) \tilde{U}_1 + (\phi_{22}^2 p_2 - \phi_{21}^2 p_2) \tilde{U}_2 + (\phi_{32}^2 p_3 - \phi_{31}^2 p_3) \tilde{U}_3 + (\phi_{42}^2 p_4 - \phi_{41}^2 p_4) \tilde{U}_4 \\
2 \quad (-\mu \phi_{12}) \tilde{U}_1 + (-\mu \phi_{22}) \tilde{U}_2 + (-\mu \phi_{32}) \tilde{U}_3 + (-\mu \phi_{42}) \tilde{U}_4 + (-\mu \phi_{11}) \tilde{V}_1 + (-\mu \phi_{21}) \tilde{V}_2 + (-\mu \phi_{31}) \tilde{V}_3 \\
\quad + (-\mu \phi_{41}) \tilde{V}_4 + (\phi_{12} S_{12} p_1) \tilde{\tau}_1 + (\phi_{22} S_{22} p_2) \tilde{\tau}_2 + (\phi_{32} S_{32} p_3) \tilde{\tau}_3 + (\phi_{42} S_{42} p_4) \tilde{\tau}_4 \\
3 \quad (\omega^2 \phi_{11}^2 \rho p_1) \tilde{U}_1 + (\omega^2 \phi_{21}^2 \rho p_2) \tilde{U}_2 + (\omega^2 \phi_{31}^2 \rho p_3) \tilde{U}_3 + (\omega^2 \phi_{41}^2 \rho p_4) \tilde{U}_4 + K_{11} \tilde{\sigma}_1 + K_{21} \tilde{\sigma}_2 + K_{31} \tilde{\sigma}_3 \\
\quad + K_{41} \tilde{\sigma}_4 + S_{12} \tilde{\tau}_1 + S_{22} \tilde{\tau}_2 + S_{32} \tilde{\tau}_3 + S_{42} \tilde{\tau}_4 \\
4 \quad (-\lambda \phi_{11} - 2\mu \phi_{11}) \tilde{U}_1 + (-\lambda \phi_{21} - 2\mu \phi_{21}) \tilde{U}_2 + (-\lambda \phi_{31} - 2\mu \phi_{31}) \tilde{U}_3 + (-\lambda \phi_{41} - 2\mu \phi_{41}) \tilde{U}_4 \\
\quad + (-\lambda \phi_{12}) \tilde{V}_1 + (-\lambda \phi_{22}) \tilde{V}_2 + (-\lambda \phi_{32}) \tilde{V}_3 + (-\lambda \phi_{42}) \tilde{V}_4 + (\phi_{11} K_{11} p_1) \tilde{\sigma}_1 + (\phi_{21} K_{21} p_2) \tilde{\sigma}_2 \\
\quad + (\phi_{31} K_{31} p_3) \tilde{\sigma}_3 + (\phi_{41} K_{41} p_4) \tilde{\sigma}_4 \\
5 \quad (\omega^2 \phi_{12}^2 \rho p_1) \tilde{V}_1 + (\omega^2 \phi_{22}^2 \rho p_2) \tilde{V}_2 + (\omega^2 \phi_{32}^2 \rho p_3) \tilde{V}_3 + (\omega^2 \phi_{42}^2 \rho p_4) \tilde{V}_4 + K_{12} \tilde{\sigma}_1 + K_{22} \tilde{\sigma}_2 + K_{32} \tilde{\sigma}_3 \\
\quad + K_{42} \tilde{\sigma}_4 + S_{11} \tilde{\tau}_1 + S_{21} \tilde{\tau}_2 + S_{31} \tilde{\tau}_3 + S_{41} \tilde{\tau}_4 \\
6 \quad (-\lambda \omega \phi_{11}) \tilde{U}_1 + (-\lambda \omega \phi_{21}) \tilde{U}_2 + (-\lambda \omega \phi_{31}) \tilde{U}_3 + (-\lambda \omega \phi_{41}) \tilde{U}_4 + \left( -\omega (\lambda \phi_{12} + 2\mu \phi_{12}) \right) \tilde{V}_1 \\
\quad + \left( -\omega (\lambda \phi_{22} + 2\mu \phi_{22}) \right) \tilde{V}_2 + \left( -\omega (\lambda \phi_{32} + 2\mu \phi_{32}) \right) \tilde{V}_3 + \left( -\omega (\lambda \phi_{42} + 2\mu \phi_{42}) \right) \tilde{V}_4 + (\omega \phi_{12} K_{12} p_1) \tilde{\sigma}_1 \\
\quad + (\omega \phi_{22} K_{22} p_2) \tilde{\sigma}_2 + (\omega \phi_{32} K_{32} p_3) \tilde{\sigma}_3 + (\omega \phi_{42} K_{42} p_4) \tilde{\sigma}_4 \\
7 \quad (\phi_{11}^2 p_1 - \phi_{12}^2 p_1) \tilde{V}_1 + (\phi_{21}^2 p_2 - \phi_{22}^2 p_2) \tilde{V}_2 + (\phi_{31}^2 p_3 - \phi_{32}^2 p_3) \tilde{V}_3 + (\phi_{41}^2 p_4 - \phi_{42}^2 p_4) \tilde{V}_4 \\
8 \quad (\phi_{11} S_{11} p_1 - \phi_{12} S_{12} p_1) \tilde{\tau}_1 + (\phi_{21} S_{21} p_2 - \phi_{22} S_{22} p_2) \tilde{\tau}_2 + (\phi_{31} S_{31} p_3 - \phi_{32} S_{32} p_3) \tilde{\tau}_3 \\
\quad + (\phi_{41} S_{41} p_4 - \phi_{42} S_{42} p_4) \tilde{\tau}_4
\end{array}$$

(10)

где  $U, V, \sigma, \tau$  – интегралы от перемещения и напряжений на каждой грани;  $\phi_{n1}, \phi_{n2}, K_{n1}, K_{n2}, S_{n1}, S_{n2}$  – коэффициенты, определяющие геометрические параметры, знаки и векторы элемента;  $\lambda, \mu$  – параметры Ламе;  $\omega$  – круговая частота;  $n = 1, 2, 3, 4$  – номер граней.