

Министерство образования и науки Астраханской области
Государственное бюджетное образовательное учреждение
Астраханской области высшего образования
«Астраханский государственный архитектурно-строительный
университет»
(ГБОУ АО ВО «АГАСУ»)

УТВЕРЖДАЮ

И.о. ректора



(подпись)

/ С.П. Стрелков /

И. О. Ф

« 18 » апреля 2025 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины

Линейная алгебра

(указывается наименование в соответствии с учебным планом)

По направлению подготовки

38.03.01 «Экономика»

(указывается наименование направления подготовки в соответствии с ФГОС ВО)

Направленность (профиль)

«Ценообразование и сметное дело в строительстве»

«Бухгалтерский учет, анализ и аудит»

(указывается наименование направленности (профиля) в соответствии с ОПОП)

Кафедра

Системы автоматизированного проектирования и моделирования

Квалификация выпускника *бакалавр*

Разработчик:

ст. преподаватель
(занимаемая должность,
учёная степень и учёное звание)


(подпись)

/ И.А. Череповская /
И. О. Ф.

Рабочая программа рассмотрена и утверждена на заседании кафедры
«Системы автоматизированного проектирования и моделирования»
протокол № 9 от «14» апреля 2025 г.

И.о. заведующего кафедрой


(подпись)

/ В.В. Соболева /
И. О. Ф.

Согласовано:

Председатель МКН «Экономика»
направленность (профиль) «Ценообразование и сметное дело в строительстве»,
направленность (профиль) «Бухгалтерский учет, анализ и аудит»


(подпись)

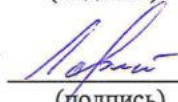
/ И.А. Митченко /
И. О. Ф

Начальник УМУ


(подпись)

/ О.Н. Беспалова /
И. О. Ф

Специалист УМУ


(подпись)

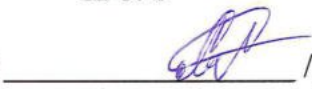
/ С.А. Ларин /
И. О. Ф

Начальник УИТ


(подпись)

/ П.Н. Гедза /
И. О. Ф

Заведующая научной библиотекой


(подпись)

/ Л.С. Гаврилова /
И. О. Ф

Содержание:

	Стр.
1. Цель освоения дисциплины	4
2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы	4
3. Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата	4
4. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по типам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся	5
5. Содержание дисциплины, структурированное по разделам с указанием отведенного на них количества академических часов и типов учебных занятий	6
5.1. Разделы дисциплины и трудоемкость по типам учебных занятий и работы обучающихся (в академических часах)	6
5.1.1. Очная форма обучения	6
5.1.2. Заочная форма обучения	6
5.1.3. Очно-заочная форма обучения	7
5.2. Содержание дисциплины, структурированное по разделам	8
5.2.1. Содержание лекционных занятий	8
5.2.2. Содержание лабораторных занятий	9
5.2.3. Содержание практических занятий	10
5.2.4. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине	12
5.2.5. Темы контрольных работ	13
5.2.6. Темы курсовых проектов/курсовых работ	14
6. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины	14
7. Образовательные технологии	15
8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины	16
8.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	16
8.2. Перечень необходимого лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе и отечественного производства, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине	17
8.3. Перечень современных профессиональных баз данных и информационно-справочных систем, доступных при освоении дисциплины	17
9. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине	17
10. Особенности организации обучения по дисциплине «Линейная алгебра» для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья	18

1. Цель освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины «*Линейная алгебра*» является формирование компетенций обучающихся в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 38.03.01 «ЭКОНОМИКА».

2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с планируемыми результатами освоения образовательной программы

В результате освоения дисциплины обучающийся должен овладеть следующими компетенциями:

УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач.

ОПК-2. Способен осуществлять сбор, обработку и статистический анализ данных, необходимых для решения поставленных экономических задач.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен овладеть следующими результатами обучения по дисциплине:

знать:

- методики поиска, сбора и обработки информации, метод системного анализа (31УК-1.1);
- методы сбора, обработки и анализа данных, необходимых для решения управленческих задач (31ОПК-2.1);
- современные интеллектуально-поисковые системы (32ОПК-2.1);

уметь:

- применять методики поиска, сбора, обработки информации, системный подход для решения поставленных задач и осуществлять критический анализ и синтез информации, полученной из актуальных российских и зарубежных источников (У1УК – 1.2);
- выбирать и использовать адекватные содержанию профессиональных задач методы обработки и анализа данных (У1ОПК-2.2);

владеть:

- методами поиска, сбора и обработки, критического анализа и синтеза информации, методикой системного подхода для решения поставленных задач (В1УК – 1.3);
- способами статистической обработки и интеллектуального анализа информации, необходимой для принятия обоснованных организационно-управленческих решений (В1ОПК-2.3).

3. Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата

Дисциплина **Б1.О.08 «Линейная алгебра»** реализуется в рамках *Блока 1 «Дисциплины» (модули)* обязательной части. Дисциплина базируется на результатах обучения полученных в рамках изучения следующих дисциплин: «Информатика», «Геометрия», «Алгебра» средней школы

4. Объем дисциплины в зачетных единицах с указанием количества академических часов, выделенных на контактную работу обучающихся с преподавателем (по типам учебных занятий) и на самостоятельную работу обучающихся

Форма обучения	Очная	Очно-заочная
Трудоемкость в зачетных единицах:	1 семестр – 4 з.е.; всего - 4 з.е.	3 семестр - 4 з.е.; всего - 4 з.е.
Лекции (Л)	1 семестр – 18 часов всего – 18 часов	3 семестр – 10 часов; всего - часов
Лабораторные занятия (ЛЗ)	1 семестр – 16 часов всего - 16 часов	3 семестр – 8 часов; всего - 8 часов
Практические занятия (ПЗ)	1 семестр – 34 часа всего – 34 часа	3 семестр – 18 часов; всего – 18 часов
Самостоятельная работа (СР)	1 семестр – 76 часов всего – 76 часов	3 семестр – 108 часов; всего - 108 часа
Форма текущего контроля:		
Контрольная работа	семестр – 1	семестр – 3
Форма промежуточной аттестации:		
Экзамены	семестр – 1	семестр – 3
Зачет	учебным планом не предусмотрен	учебным планом не предусмотрен
Зачет с оценкой	учебным планом не предусмотрен	учебным планом не предусмотрен
Курсовая работа	учебным планом не предусмотрена	учебным планом не предусмотрена
Курсовой проект	учебным планом не предусмотрен	учебным планом не предусмотрен

5. Содержание дисциплины, структурированное по разделам с указанием отведенного на них количества академических часов и типов учебных занятий

5.1. Разделы дисциплины и трудоемкость по типам учебных занятий и работы обучающихся (в академических часах)

5.1.1. Очная форма обучения

№ п/п	Раздел дисциплины. (по семестрам)	Всего часов на раздел	Семестр	Распределение трудоемкости раздела (в часах) по типам учебных занятий и работы обучающихся					Форма текущего контроля и промежуточной аттестации
				контактная			СР		
				Л	ЛЗ	ПЗ			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1.	Раздел 1. Матрицы и определители	24	1	4	2	6	12	Контрольная работа Экзамен	
2.	Раздел 2. Системы линейных алгебраических уравнений	24		2	4	6	12		
3.	Раздел 3. Векторная алгебра	24		2	2	6	14		
4.	Раздел 4. Линейные операторы	24		2	2	4	16		
5.	Раздел 5. Аналитическая геометрия на плоскости	24		4	2	6	12		
6.	Раздел 6. Аналитическая геометрия в пространстве	24	4	4	6	10	76		
Итого:		144	18	16	34				

5.1.2 Заочная форма обучения

ОПОП не предусмотрено

5.1.3 Очно-заочная форма обучения

№ п/п	Раздел дисциплины. (по семестрам)	Всего часов на раздел	Семестр	Распределение трудоемкости раздела (в часах) по типам учебных занятий и работы обучающихся					Форма текущего контроля и промежуточной аттестации
				контактная			СР		
				Л	ЛЗ	ПЗ			
								Л	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1.	Раздел 1. Матрицы и определители	24	3	2	2	2	18	Контрольная работа Экзамен	
2.	Раздел 2. Системы линейных алгебраических уравнений	24		1	1	4	18		
3.	Раздел 3. Векторная алгебра	24		2	2	2	18		
4.	Раздел 4. Линейные операторы	24		2	2	2	18		
5.	Раздел 5. Аналитическая геометрия на плоскости	24		2	-	4	18		
6.	Раздел 6. Аналитическая геометрия в пространстве	24		1	1	4	18		
Итого:		144		10	8	18	108		

5.2. Содержание дисциплины, структурированное по разделам

5.2.1. Содержание лекционных занятий

№	Наименование раздела дисциплины	Содержание
1	2	3
1.	Раздел 1. Матрицы и определители	Матрицы. Действия с матрицами. Виды квадратных матриц. Линейные операции над матрицами. Умножение матриц. Элементарные преобразования матриц. Определители. Свойства определителей. Обратная матрица. Ранг матрицы. Линейная независимость рядов матрицы. <i>Методики поиска, сбора и обработки информации, метод системного анализа</i>
2.	Раздел 2. Системы линейных алгебраических уравнений	Методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Матричный метод. Формулы Крамера. Метод Гаусса. Системы линейных однородных уравнений. Неоднородные системы линейных уравнений. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики. <i>Методы сбора, обработки и анализа данных, необходимых для решения управленческих задач.</i> Балансовые соотношения. Линейная модель многоотраслевой экономики. Продуктивные модели Леонтьева. <i>Методики поиска, сбора и обработки информации, метод системного анализа. Современные интеллектуально-поисковые системы</i>
3.	Раздел 3. Векторная алгебра	Основные понятия. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис. Проекция вектора на ось. Разложение вектора по ортам координатных осей. Скалярное произведение векторов. Векторное и смешанное произведения векторов. N- мерный вектор. Линейные операции над n-мерными векторами. Длина. N-мерное векторное пространство. Базис линейного векторного пространства и координаты вектора. Переход к новому базису. Евклидово пространство. Ортонормированный базис. <i>Методики поиска, сбора и обработки информации, метод системного анализа</i>
4.	Раздел 4. Линейные операторы	Понятие линейного оператора. Матрица линейного оператора. Действия с линейными операторами. Связь между матрицами линейного оператора в разных базисах. <i>Методы сбора, обработки и анализа данных, необходимых для решения управленческих задач.</i> Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Линейная модель обмена. Квадратичные формы. <i>Методики поиска, сбора и обработки информации, метод системного анализа. Современные интеллектуально-поисковые системы.</i>
5.	Раздел 5. Аналитическая геометрия на плоскости	Системы координат на плоскости. Преобразования системы координат. Деление отрезка в данном отношении. Линии на плоскости. Уравнения прямой на плоскости. Прямая на плоскости. Линии второго порядка. <i>Методики поиска, сбора и обработки информации, метод системного анализа</i>
6.	Раздел 6. Аналитическая геометрия в пространстве	Плоскость в трехмерном пространстве. Основные задачи. Уравнение прямой в пространстве. Основные задачи. Прямая и плоскость в пространстве. Основные задачи. Поверхности второго порядка. Канонические уравнения поверхностей второго порядка

		Методики поиска, сбора и обработки информации, метод системного анализа
--	--	---

5.2.2 Содержание лабораторных занятий

№	Наименование раздела дисциплины	Содержание
1	2	3
1.	Раздел 1. Матрицы и определители	<i>Лабораторная работа №1. Матрицы и определители.</i> 1. Операции над матрицами Преобразование матриц. 2. Вычисление обратной матрицы. Поиск обратной и ортогональной матриц. <i>Применять методики поиска, сбора, обработки информации, системный подход для решения поставленных задач и осуществлять критический анализ и синтез информации, полученной из актуальных российских и зарубежных источников</i>
2.	Раздел 2. Системы линейных алгебраических уравнений	<i>Лабораторная работа №2. Решение систем линейных алгебраических уравнений.</i> 1. Решение систем матричным способом и методом Гаусса 2. Реализация модели многоотраслевого баланса. Владеть способами статистической обработки и интеллектуального анализа информации, необходимой для принятия обоснованных организационно-управленческих решений. <i>Применять методики поиска, сбора, обработки информации, системный подход для решения поставленных задач и осуществлять критический анализ и синтез информации, полученной из актуальных российских и зарубежных источников</i>
3.	Раздел 3. Векторная алгебра	<i>Лабораторная работа №3. Векторная алгебра.</i> 1. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов. 2. Определение базиса линейного векторного пространства и координат в новом базисе. <i>Выбирать и использовать адекватные содержанию профессиональных задач методы обработки и анализа данных</i>
4.	Раздел 4. Линейные операторы	<i>Лабораторная работа №4. Линейные операторы.</i> 1. Поиск собственных векторов и собственных значений линейного оператора 2. Реализация линейной модели обмена. <i>Применять методики поиска, сбора, обработки информации, системный подход для решения поставленных задач и осуществлять критический анализ и синтез информации, полученной из актуальных российских и зарубежных источников</i>

5.	Раздел 5. Аналитическая геометрия на плоскости	Лабораторные работы №5; №6 Прямая и кривые второго порядка. 1. Задачи с прямыми. 2. Построение кривых второго порядка на плоскости. <i>Владеть методами поиска, сбора и обработки, критического анализа и синтеза информации, методикой системного подхода для решения поставленных задач.</i>
6.	Раздел 6. Аналитическая геометрия в пространстве	Лабораторные работы №7; №8 Плоскость и прямая в пространстве. 1. Построение прямых и плоскостей в пространстве. 2. Построение поверхностей второго порядка. <i>Владеть методами поиска, сбора и обработки, критического анализа и синтеза информации, методикой системного подхода для решения поставленных задач</i>

5.2.3 Содержание практических занятий

№	Наименование раздела дисциплины	Содержание
1	2	3
1.	Раздел 1. Матрицы и определители	Входное тестирование по дисциплине. Линейные операции над матрицами. Операция транспонирования. <i>Уметь применять методики поиска, сбора, обработки информации, системный подход для решения поставленных задач и осуществлять критический анализ и синтез информации, полученной из актуальных российских и зарубежных источников</i> Элементарные преобразования матриц. Умножения матриц. Алгоритмы вычисления определителей. Алгоритм нахождения обратной матрицы. Ранг матрицы. <i>Выбирать и использовать адекватные содержанию профессиональных задач методы обработки и анализа данных</i>
2.	Раздел 2. Системы линейных алгебраических уравнений	Решение систем алгебраических уравнений. Матричный метод. Формулы Крамера. Метод Гаусса. Решение систем линейных однородных уравнений. Неоднородные системы линейных уравнений. <i>Уметь применять методики поиска, сбора, обработки информации, системный подход для решения поставленных задач и осуществлять критический анализ и синтез информации, полученной из актуальных российских и зарубежных источников.</i> Построение модели Леонтьева. <i>Владеть способами статистической обработки и интеллектуального анализа информации, необходимой для принятия обоснованных организационно-управленческих решений.</i> Реализация линейной модели многоотраслевой экономики и вариативность продуктивной модели Леонтьева. <i>Владеть</i>

		<i>методами поиска, сбора и обработки, критического анализа и синтеза информации, методикой системного подхода для решения поставленных задач</i>
3.	Раздел 3. Векторная алгебра	Разложение вектора по ортам координатных осей. Нахождение скалярного, векторного и смешанного произведений векторов. Линейные операции над <i>n</i> -мерными векторами. <i>Выбирать и использовать адекватные содержанию профессиональных задач методы обработки и анализа данных</i> Установление линейной независимости векторов. Определение базиса линейного векторного пространства и координат вектора. Переход к новому базису.
4.	Раздел 4. Линейные операторы	Матрица линейного оператора. Действия с линейными операторами. Поиск собственных векторов и собственных значений линейного оператора. <i>Уметь применять методики поиска, сбора, обработки информации, системный подход для решения поставленных задач и осуществлять критический анализ и синтез информации, полученной из актуальных российских и зарубежных источников</i> Построение линейной модели обмена. <i>Владеть способами статистической обработки и интеллектуального анализа информации, необходимой для принятия обоснованных организационно-управленческих решений. Владеть методами поиска, сбора и обработки, критического анализа и синтеза информации, методикой системного подхода для решения поставленных задач</i>
5.	Раздел 5. Аналитическая геометрия на плоскости	Преобразования системы координат. Поиск уравнения прямой на плоскости. Нахождение угла между прямыми и расстояния от точки до прямой. Определение канонического уравнения кривой второго порядка и ее построение на плоскости <i>Владеть методами поиска, сбора и обработки, критического анализа и синтеза информации, методикой системного подхода для решения поставленных задач.</i>
6.	Раздел 6. Аналитическая геометрия в пространстве	Поиск уравнения плоскости в трехмерном пространстве по различным данным. Уравнения прямой в пространстве. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве. Канонические поверхности второго порядка. <i>Выбирать и использовать адекватные содержанию профессиональных задач методы обработки и анализа данных. Владеть методами поиска, сбора и обработки, критического анализа и синтеза информации, методикой системного подхода для решения поставленных задач</i>

5.2.4 Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

Очная форма обучения

№	Наименование раздела дисциплины	Содержание	Учебно-методическое обеспечение
1	2	3	4
1.	Раздел 1. Матрицы и определители	Линейные операции над матрицами. Элементарные преобразования матриц. Свойства определителей. Ранг матрицы. Линейная независимость рядов матрицы. Подготовка к лабораторным работам Подготовка к практическим работам. Подготовка к контрольной работе. Подготовка к итоговому тестированию. Подготовка к экзамену.	[1], [2], [3], [4],[7],[9]
2.	Раздел 2. Системы линейных алгебраических уравнений	Модель Леонтьева многоотраслевой экономики. Балансовые соотношения Линейная модель многоотраслевой экономики. Продуктивные модели Леонтьева Подготовка к лабораторным работам. Подготовка к практическим работам. Подготовка к контрольной работе. Подготовка к итоговому тестированию. Подготовка к экзамену.	[1], [2], [3], [4], [8], [9].
3.	Раздел 3. Векторная алгебра	Базис N-мерного векторного пространства. Переход к новому базису. Евклидово пространство. Подготовка к лабораторным работам. Подготовка к практическим работам. Подготовка к контрольной работе. Подготовка к итоговому тестированию. Подготовка к экзамену	[2], [3], [4],[6],[7],[9].
4.	Раздел 4. Линейные операторы	Матрица линейного оператора. Действия с линейными операторами. Модель обмена. Квадратичные формы. Подготовка к лабораторным работам. Подготовка к практическим работам. Подготовка к контрольной работе. Подготовка к итоговому тестированию. Подготовка к экзамену.	[2], [3], [4], [5], [7], [8]
5.	Раздел 5. Аналитическая геометрия на плоскости	Преобразования системы координат. Деление отрезка в данном отношении. Преобразование вида уравнения прямой на плоскости. Свойства кривых второго порядка. Подготовка к лабораторным работам. Подготовка к практическим работам. Подготовка к контрольной работе. Подготовка к итоговому тестированию. Подготовка к экзамену.	[1], [2], [3], [4], [5], [6].
6.	Раздел 6. Аналитическая геометрия в пространстве	Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве. Канонические уравнения поверхностей второго порядка. Подготовка к лабораторным работам. Подготовка к практическим работам. Подготовка к контрольной работе. Подготовка к итоговому тестированию. Подготовка к экзамену.	[1], [2], [3],[4],[7],[9]

Очно-заочная форма обучения

№	Наименование раздела дисциплины	Содержание	Учебно-методическое обеспечение
1	2	3	4
1.	Раздел 1. Матрицы и определители	Линейные операции над матрицами. Элементарные преобразования матриц. Свойства определителей. Ранг матрицы. Линейная независимость рядов матрицы. Подготовка к лабораторным работам Подготовка к практическим работам. Подготовка к контрольной работе. Подготовка к итоговому тестированию. Подготовка к экзамену.	[1], [2], [3], [4],[7],[9]
2.	Раздел 2. Системы линейных алгебраических уравнений	Модель Леонтьева многоотраслевой экономики. Балансовые соотношения. Линейная модель многоотраслевой экономики. Продуктивные модели Леонтьева Подготовка к лабораторным работам. Подготовка к практическим работам. Подготовка к контрольной работе. Подготовка к итоговому тестированию. Подготовка к экзамену.	[1], [2], [3], [4], [8], [9].
3.	Раздел 3. Векторная алгебра	Базис N-мерного векторного пространства. Переход к новому базису. Евклидово пространство. Подготовка к лабораторным работам. Подготовка к практическим работам. Подготовка к контрольной работе. Подготовка к итоговому тестированию. Подготовка к экзамену.	[2], [3], [4],[6],[7],[9].
4.	Раздел 4. Линейные операторы	Матрица линейного оператора. Действия с линейными операторами. Модель обмена. Квадратичные формы. Подготовка к лабораторным работам. Подготовка к практическим работам. Подготовка к контрольной работе. Подготовка к итоговому тестированию. Подготовка к экзамену.	[2], [3], [4], [5], [7], [8]
5.	Раздел 5. Аналитическая геометрия на плоскости	Преобразования системы координат. Деление отрезка в данном отношении. Преобразование вида уравнения прямой на плоскости. Свойства кривых второго порядка. Подготовка к лабораторным работам. Подготовка к практическим работам. Подготовка к контрольной работе. Подготовка к итоговому тестированию. Подготовка к экзамену.	[1], [2], [3], [4], [5], [6].
6.	Раздел 6. Аналитическая геометрия в пространстве	Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве. Канонические уравнения поверхностей второго порядка. Подготовка к лабораторным работам. Подготовка к практическим работам. Подготовка к контрольной работе. Подготовка к итоговому тестированию. Подготовка к экзамену.	[1], [2], [3],[4],[7],[9]

5.2.5 Темы контрольных работ

1. Операции над векторами и матрицами.
2. Решение систем линейных алгебраических уравнений.
3. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов.
4. Базис линейного векторного пространства и координаты вектора.

5. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.
6. Уравнения прямой на плоскости.
7. Построение кривых второго порядка на плоскости.
8. Канонические уравнения поверхностей второго порядка.

5.2.6 Темы курсовых проектов/ курсовых работ

Учебным планом не предусмотрены.

6 Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Организация деятельности студента
<u>Лекция</u> В ходе лекционных занятий необходимо вести конспектирование учебного материала, обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных явлений и процессов, научные выводы и практические рекомендации. Необходимо задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций. Целесообразно добавлять свой конспект лекции, делая в нем соответствующие записи из литературы, рекомендованной преподавателем и предусмотренной учебной программой.
<u>Практическое занятие</u> Работа с конспектом лекций, подготовка ответов к контрольным вопросам, просмотр рекомендуемой литературы. Особое внимание при этом необходимо обратить на содержание основных положений и выводов, объяснение явлений и фактов, уяснение практического приложения рассматриваемых теоретических вопросов.
<u>Лабораторное занятие.</u> Работа в соответствии с методическими указаниями по выполнению лабораторных работ.
<u>Самостоятельная работа</u> Самостоятельная работа студента над усвоением учебного материала по учебной дисциплине может выполняться в помещениях для самостоятельной работы, а также в домашних условиях. Содержание самостоятельной работы студента определяется учебной программой дисциплины, методическими материалами, заданиями и указаниями преподавателя. Самостоятельная работа в аудиторное время может включать: – конспектирование (составление тезисов) лекций; – решение задач; – работу со справочной и методической литературой; – участие в тестировании и др. Самостоятельная работа во внеаудиторное время может состоять из: – повторения лекционного материала; – подготовки к практическим и лабораторным занятиям; – изучения учебной и научной литературы; – решения задач, выданных на практических занятиях; – подготовки к контрольной работе; – подготовки к итоговому тестированию и т.д.; – выделения наиболее сложных и проблемных вопросов по изучаемой теме, получения разъяснений и рекомендаций по данным вопросам от преподавателей кафедры на еженедельных консультациях; – проведения самоконтроля путем ответов на вопросы текущего контроля знаний, решения представленных в учебно-методических материалах кафедры задач и тестов.

Контрольная работа.

Теоретическая и практическая части контрольной работы выполняются по установленным темам (вариантам) с использованием практических материалов, полученных на практических занятиях и при прохождении практики. К каждой теме контрольной работы рекомендуется примерный перечень основных вопросов, список необходимой литературы. Необходимо изучить литературу, рекомендуемую для выполнения контрольной работы. Чтобы полнее раскрыть тему, следует использовать дополнительные источники и материалы. Инструкция по выполнению контрольной работы находится в методических материалах по дисциплине.

Подготовка к экзамену

Подготовка студентов к экзамену включает три стадии:

- самостоятельную работу в течение учебного семестра;
- непосредственную подготовку в дни, предшествующие экзамену;
- подготовку к ответу на вопросы, содержащиеся в билете.

7. Образовательные технологии

Перечень образовательных технологий, используемых при изучении дисциплины «Линейная алгебра».

Традиционные образовательные технологии

Дисциплина «Линейная алгебра» проводится с использованием традиционных образовательных технологий ориентирующиеся на организацию образовательного процесса, предполагающую прямую трансляцию знаний от преподавателя к студенту (преимущественно на основе объяснительно-иллюстративных методов обучения), учебная деятельность студента носит в таких условиях, как правило, репродуктивный характер. Формы учебных занятий по дисциплине «Математический анализ» с использованием традиционных технологий:

Лекция – последовательное изложение материала в дисциплинарной логике, осуществляемое преимущественно вербальными средствами (монолог преподавателя).

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по предложенному алгоритму.

Лабораторное занятие – организация учебной работы с реальными материальными и информационными объектами, экспериментальная работа с моделями реальных объектов.

Интерактивные технологии

По дисциплине «Линейная алгебра» лекционные занятия проводятся с использованием следующих интерактивных технологий:

Лекция-визуализация - представляет собой визуальную форму подачи лекционного материала средствами ТСО или аудиовидеотехники (видео-лекция). Чтение такой лекции сводится к развернутому или краткому комментированию просматриваемых визуальных материалов (в виде схем, таблиц, графов, графиков, моделей). Лекция- визуализация помогает студентам преобразовывать лекционный материал в визуальную форму, что способствует формированию у них профессионального мышления за счет систематизации и выделения наиболее значимых, существенных элементов.

Лекция–провокация (изложение материала с заранее запланированными ошибками). Такой тип лекций рассчитан на стимулирование обучающихся к постоянному контролю предлагаемой информации и поиску ошибок. В конце лекции проводится диагностика знаний обучающихся и разбор сделанных ошибок.

По дисциплине «Линейная алгебра» лабораторные и практические занятия проводятся с использованием следующих интерактивных технологий:

Работа в малых группах – это одна из самых популярных стратегий, так как она дает всем обучающимся (в том числе и стеснительным) возможность участвовать в работе, практиковать навыки сотрудничества, межличностного общения (в частности, умение активно слушать, вырабатывать общее мнение, разрешать возникающие разногласия). Все это часто бывает невозможно в большом коллективе.

Разработка проекта (метод проектов) – организация обучения, при которой учащиеся приобретают знания в процессе планирования и выполнения практических заданий-проектов.

Ролевые игры – совместная деятельность группы обучающихся и преподавателя под управлением преподавателя с целью решения учебных и профессионально-ориентированных задач путем игрового моделирования реальной проблемной ситуации. Позволяет оценивать умение анализировать и решать типичные профессиональные задачи.

8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

8.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

а) основная учебная литература:

1. Балдин, К. В. Краткий курс высшей математики : учебник / К. В. Балдин, А. В. Рукосуев ; под общ. ред. К. В. Балдина. – 7-е изд. – Москва : Дашков и К°, 2025. – 510 с. : ил., табл., схем., граф. – (Учебные издания для бакалавров). – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=720251>

2. Беклемишев, Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре : учебное пособие : / Л. А. Беклемишева, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров ; ред. Д. В. Беклемишев. – 2-е изд., перераб. – Москва : Физматлит, 2006. – 496 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=82795>

3. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник Д. В. Беклемишев. — 12-е изд., испр. — Москва : Физматлит, 2009. — 309 с. — Режим доступа: по подписке. — URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=83040>

б) дополнительная учебная литература:

4. Высшая математика. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : конспект лекций по специальности 080507 «Менеджмент организации»/ составители А. С. Ащеулова, О. С. Карнадуд, А. И. Саблинский. - Кемерово : Кемеровский государственный институт культуры, 2011. - 71 с. - Текст : электронный// Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/21960.htm> 1

5. Антонова, Е. В. Математика для самостоятельного изучения : векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Линейная алгебра : учебно-методическое пособие : [16+] / Е. В. Антонова, Е. Б. Арутюнян. – Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2025. – 280 с. : ил., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=727073>

6. Бреднихина О.Ю. Линейная алгебра. В 2 частях. Ч.1 : учебно-методическое пособие / Бреднихина О.Ю., Ивлева А.М.. — Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2025. — 80 с. — ISBN 978-5-7782-5366-7, 978-5-7782-5367-4 (ч.1). — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/156049.html>

7. Гусак, А. А. Высшая математика. Том 2: учебник/ А. А. Гусак. - Минск : ГетраСистемс, 2009. - 446 с. - ISBN 978-985-470-939-0. - Текст: электронный// Электронно-библиотечная система IPR BOOKS: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/28060.html>

8. Волков, Д. Ю. Аналитическая геометрия и линейная алгебра : учебное пособие / Д. Ю. Волков, К. В. Галунова. — Москва, Вологда : Инфра-Инженерия, 2024. — 116 с. — ISBN 978-5-9729-1894-2. — Текст : электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART : [сайт]. — URL: <https://www.iprbookshop.ru/143503.html>

в) перечень учебно-методического обеспечения:

9. Михадарова, О. В. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия : учебно-методическое пособие : / О. В. Михадарова, С. Н. Сусанина ; Поволжский государственный

технологический университет. – Йошкар-Ола : Поволжский государственный технологический университет, 2024. – 108 с. : ил., табл. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=718732>

г) перечень онлайн курсов

10. Национальный открытый университет «Интуит»

<https://www.intuit.ru/studies/courses/107/107/info>

8.2. Перечень необходимого лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

1. 7-Zip
2. Office 365 A1
3. Adobe Acrobat Reader DC
4. VLC media player
5. Apache Open Office
6. Office Pro Plus Russian OLPNL Academic Edition
7. Kaspersky Endpoint Security
8. Microsoft Azure Dev Tools for Teaching
9. Mathcad Education – University Edition.
10. Yandex браузер.

8.3. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, доступных обучающимся при освоении дисциплины:

1. Электронная информационно-образовательная среда Университета: (<http://moodle.aucu.ru/>);
2. Электронно-библиотечные системы «Университетская библиотека» (<http://biblioclub.ru/>);
3. Электронно-библиотечная система «IPRbooks» (www.iprbookshop.ru).
4. Научная электронная библиотека (<http://www.elibrary.ru/>)
5. Консультант + (<http://www.consultant-urist.ru/>).
6. Федеральный институт промышленной собственности (<http://www1.fips.ru/>);

9. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине

№	Наименование специальных помещений и помещений для самостоятельной работы	Оснащенность специальных помещений и помещений для самостоятельной работы
1.	Учебные аудитории для проведения учебных занятий: 414056, г. Астрахань, ул. Татищева, 18, аудитории № 204, 4, 207, 209; 414056, г. Астрахань, ул. Татищева, 22а, аудитории № 202, 204, 205,	№ 204 Комплект учебной мебели. Стационарный мультимедийный комплект. Доступ к информационно – телекоммуникационной сети «Интернет»
		№ 4 Комплект учебной мебели. Переносной мультимедийный комплект. Доступ к информационно – телекоммуникационной сети «Интернет»
		№ 207 Комплект учебной мебели. Компьютеры - 15 шт. Стационарный мультимедийный комплект. Доступ к

		информационно – телекоммуникационной сети «Интернет»
		№ 209 Комплект учебной мебели. Компьютеры - 15 шт. Стационарный мультимедийный комплект. Доступ к информационно – телекоммуникационной сети «Интернет»
		№ 202 Комплект учебной мебели. Переносной мультимедийный комплект. Доступ к информационно – телекоммуникационной сети «Интернет»
		№ 204 Комплект учебной мебели. Переносной мультимедийный комплект. Доступ к информационно – телекоммуникационной сети «Интернет»
		№ 205 Комплект учебной мебели. Переносной мультимедийный комплект. Доступ к информационно – телекоммуникационной сети «Интернет»
2.	Помещения для самостоятельной работы: 414056, г. Астрахань, ул.	№ 201 Комплект учебной мебели. Компьютеры - 8 шт. Доступ к информационно – телекоммуникационной сети «Интернет»
	Татищева, 22а, №201, 203. 414056, г. Астрахань, ул. Татищева, 186, библиотека, читальный зал.	№ 203 Комплект учебной мебели. Компьютеры - 8 шт. Доступ к информационно – телекоммуникационной сети «Интернет».
		Библиотека, читальный зал. Комплект учебной мебели. Компьютеры - 4 шт. Доступ к информационно – телекоммуникационной сети «Интернет».

10. Особенности организации обучения по дисциплине для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья

Для обучающихся из числа инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья на основании письменного заявления дисциплина «**Линейная алгебра**» реализуется с учетом особенностей психофизического развития, индивидуальных возможностей и состояния здоровья (далее – индивидуальных особенностей).

**Лист внесения дополнений и изменений
в рабочую программу учебной дисциплины**

Линейная алгебра
(наименование дисциплины)

на 20__ - 20__ учебный год

Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры
«Системы автоматизированного проектирования и
моделирования»,

протокол № ____ от _____ 20__ г.

Зав. кафедрой

_____ ученая степень, ученое звание	_____ подпись	/ _____ / И.О. Фамилия
--	------------------	---------------------------

В рабочую программу вносятся следующие изменения:

Составители изменений и дополнений:

_____ ученая степень, ученое звание	_____ подпись	_____ И.О. Фамилия
_____ ученая степень, ученое звание	_____ подпись	_____ И.О. Фамилия

Председатель методической комиссии

_____ ученая степень, ученое звание	_____ подпись	/ _____ / И.О. Фамилия
--	------------------	---------------------------

« ____ » _____ 20__ г.

Аннотация
к рабочей программе дисциплины «Линейная алгебра»
по направлению подготовки **38.03.01 «Экономика»**
направленность (профиль) **«Ценообразование и сметное дело в строительстве»,**
«Бухгалтерский учет, анализ и аудит»

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетные единицы.

Форма промежуточной аттестации: экзамен.

Целью освоения дисциплины «Линейная алгебра» является формирование компетенций обучающихся в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки **38.03.01 «Экономика»**.

Учебная дисциплина «Линейная алгебра» входит в **Блок 1. «Дисциплины» (модули) обязательной части.** Для освоения дисциплины необходимы знания, полученные при изучении следующих дисциплин: «Информатика», «Геометрия», «Алгебра» средней школы.

Краткое содержание дисциплины:

1. Матрицы и определители.
2. Системы линейных алгебраических уравнений.
3. Векторная алгебра.
4. Линейные операторы.
5. Аналитическая геометрия на плоскости.
6. Аналитическая геометрия в пространстве.

И.о. заведующего кафедрой


(подпись)

/ В.В. Соболева /
И. О. Ф.

РЕЦЕНЗИЯ

на рабочую программу, оценочные и методические материалы по дисциплине

Б1.О.08 Линейная алгебра

(наименование дисциплины с указанием блока)

ОПОП ВО по направлению подготовки 38.03.01 «ЭКОНОМИКА»,

направленность (профиль) «Ценообразование и сметное дело в строительстве»,

«Бухгалтерский учет, анализ и аудит»

по программе бакалавриата

Садчиковым П.Н. (далее по тексту рецензент), проведена рецензия рабочей программы, оценочных и методических материалов по дисциплине **«Линейная алгебра»** ОПОП ВО по направлению подготовки **38.03.01 «Экономика»,** направленность (профиль) **«Ценообразование и сметное дело в строительстве»,** «Бухгалтерский учет, анализ и аудит» по программе **бакалавриата,** разработанной в ГБОУ АО ВО "Астраханский государственный архитектурно-строительный университет", на кафедре **«Системы автоматизированного проектирования и моделирования»** (разработчик – **старший преподаватель Череповская Ирина Анатольевна**).

Рассмотрев представленные на рецензию материалы, рецензент пришел к следующим выводам:

Предъявленная рабочая программа учебной дисциплины **«Линейная алгебра»** (далее по тексту Программа) соответствует требованиям ФГОС ВО по направлению подготовки **38.03.01 «Экономика»,** утвержденного приказом Министерства науки и высшего образования РФ от 12 августа 2020 г. № 954 и зарегистрированного в Минюсте России 25 августа 2020, рег.№59425.

Представленная в Программе актуальность учебной дисциплины в рамках реализации ОПОП ВО не подлежит сомнению – дисциплина относится к **обязательной** части учебного цикла Блок 1 «Дисциплины (модули)».

Представленные в Программе цели учебной дисциплины соответствуют требованиям ФГОС ВО направления подготовки **38.03.01 «Экономика»,** направленность (профиль) **«Ценообразование и сметное дело в строительстве», «Бухгалтерский учет, анализ и аудит».**

В соответствии с Программой за дисциплиной **«Линейная алгебра»** закреплены **2 компетенции,** которые реализуются в объявленных требованиях.

Предложенные в Программе индикаторы компетенций в категориях знать, уметь, владеть отражают специфику и содержание дисциплины, а представленные в ОММ показатели и критерии оценивания компетенций по дисциплине на различных этапах их формирования, а также шкалы оценивания позволяют определить степень достижения заявленных результатов, т.е. уровень освоения обучающимися соответствующих компетенций в рамках дисциплины **«Линейная алгебра».**

Учебная дисциплина **«Линейная алгебра»** взаимосвязана с другими дисциплинами ОПОП ВО по направлению подготовки **38.03.01 «Экономика»** направленность (профиль) **«Ценообразование и сметное дело в строительстве», «Бухгалтерский учет, анализ и аудит»** и возможность дублирования в содержании не выявлена.

Представленная Программа предполагает использование современных образовательных технологий при реализации различных видов учебной работы. Формы образовательных технологий соответствуют специфике дисциплины.

Представленные и описанные в Программе формы текущей оценки знаний соответствуют специфике дисциплины и требованиям к выпускникам.

Промежуточная аттестация знаний **бакалавра,** предусмотренная Программой, осуществляется в форме **экзамена.** Формы оценки знаний, представленные в Рабочей программе, соответствуют специфике дисциплины и требованиям к выпускникам.

Учебно-методическое обеспечение дисциплины представлено основной, дополнительной литературой, интернет-ресурсами и соответствует требованиям ФГОС ВО направления подготовки **38.03.01 «Экономика»** направленность (профиль) *«Ценообразование и сметное дело в строительстве»*, *«Бухгалтерский учет, анализ и аудит»*.

Материально-техническое обеспечение соответствует требованиям ФГОС ВО направления подготовки **38.03.01 «Экономика»** и специфике дисциплины *«Линейная алгебра»* и обеспечивает использование современных образовательных, в том числе интерактивных методов обучения.

Представленные на рецензию оценочные и методические материалы направления подготовки **38.03.01 «Экономика»**, направленность (профиль) *«Ценообразование и сметное дело в строительстве»*, *«Бухгалтерский учет, анализ и аудит»* разработаны в соответствии с нормативными документами, представленными в Программе. Оценочные и методические материалы по дисциплине *«Линейная алгебра»* предназначены для текущего контроля и промежуточной аттестации и представляют собой совокупность разработанных кафедрой *«Системы автоматизированного проектирования и моделирования»* материалов для установления уровня и качества достижения обучающимися результатов обучения.

Задачами оценочных и методических материалов является контроль и управление процессом освоения обучающимися компетенций, заявленных в образовательной программе по направлению подготовки **38.03.01 «Экономика»**, направленность (профиль) *«Ценообразование и сметное дело в строительстве»*, *«Бухгалтерский учет, анализ и аудит»*.

Оценочные и методические материалы по дисциплине *«Линейная алгебра»* представлены вопросами к экзамену, заданиями к контрольной работе, заданиями к входному и итоговому тестированию, заданиями к практическим занятиям, типовыми заданиями к защите лабораторных работ.

Данные материалы позволяют в полной мере оценить результаты обучения по дисциплине *«Линейная алгебра»* в АГАСУ, а также оценить степень сформированности компетенций.

ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

На основании проведенной рецензии можно сделать заключение, что характер, структура и содержание рабочей программы, оценочных и методических материалов дисциплины **Б1.О.08 «Линейная алгебра»** ОПОП ВО по направлению **38.03.01 «Экономика»** по программе *бакалавриата*, разработанные *старшим преподавателем Череповской Ириной Анатольевной* соответствуют требованиям ФГОС ВО, современным требованиям отрасли, рынка труда, профессиональных стандартов направления подготовки **38.03.01 «Экономика»**, направленность (профиль) *«Ценообразование и сметное дело в строительстве»*, *«Бухгалтерский учет, анализ и аудит»* и могут быть рекомендованы к использованию.

Рецензент:

кандидат технических наук, доцент
кафедры «Системы автоматизированного
проектирования и моделирования (САПРиМ)»,
ГБОУ АО ВО «Астраханский государственный
архитектурно-строительный университет»

Подпись Садчиков П.Н.
д.т.н., доцент
инженер Садчиков П.Н.



[Handwritten signature]
(подпись)

/ Садчиков П.Н. /
(Ф. И. О)

РЕЦЕНЗИЯ

на рабочую программу, оценочные и методические материалы по дисциплине

Б1.О.08 Линейная алгебра

(наименование дисциплины с указанием блока)

ОПОП ВО по направлению подготовки 38.03.01 «ЭКОНОМИКА»,

направленность (профиль) «Ценообразование и сметное дело в строительстве»,

«Бухгалтерский учет, анализ и аудит»

по программе бакалавриата

Терновой Г.Н. (далее по тексту рецензент), проведена рецензия рабочей программы, оценочных и методических материалов по дисциплине *«Линейная алгебра»* ОПОП ВО по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика», направленность (профиль) *«Ценообразование и сметное дело в строительстве»*, «Бухгалтерский учет, анализ и аудит» по программе *бакалавриата*, разработанной в ГБОУ АО ВО "Астраханский государственный архитектурно-строительный университет", на кафедре *«Системы автоматизированного проектирования и моделирования»* (разработчик – *старший преподаватель Череповская И.А.*).

Рассмотрев представленные на рецензию материалы, рецензент пришел к следующим выводам:

Предъявленная рабочая программа учебной дисциплины *«Линейная алгебра»* (далее по тексту Программа) соответствует требованиям ФГОС ВО по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика», утвержденного приказом Министерства науки и высшего образования РФ от 12 августа 2020 г. № 954 и зарегистрированного в Минюсте России 25 августа 2020, рег.№59425.

Представленная в Программе актуальность учебной дисциплины в рамках реализации ОПОП ВО не подлежит сомнению – дисциплина относится к *обязательной* части учебного цикла Блок 1 «Дисциплины (модули)».

Представленные в Программе цели учебной дисциплины соответствуют требованиям ФГОС ВО направления подготовки 38.03.01 «Экономика», направленность (профиль) *«Ценообразование и сметное дело в строительстве»*, «Бухгалтерский учет, анализ и аудит».

В соответствии с Программой за дисциплиной *«Линейная алгебра»* закреплены **2 компетенции**, которые реализуются в объявленных требованиях.

Предложенные в Программе индикаторы компетенций в категориях знать, уметь, владеть отражают специфику и содержание дисциплины, а представленные в ОММ показатели и критерии оценивания компетенций по дисциплине на различных этапах их формирования, а также шкалы оценивания позволяют определить степень достижения заявленных результатов, т.е. уровень освоения обучающимися соответствующих компетенций в рамках дисциплины *«Линейная алгебра»*.

Учебная дисциплина *«Линейная алгебра»* взаимосвязана с другими дисциплинами ОПОП ВО по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика» направленность (профиль) *«Ценообразование и сметное дело в строительстве»*, «Бухгалтерский учет, анализ и аудит» и возможность дублирования в содержании не выявлена.

Представленная Программа предполагает использование современных образовательных технологий при реализации различных видов учебной работы. Формы образовательных технологий соответствуют специфике дисциплины.

Представленные и описанные в Программе формы текущей оценки знаний соответствуют специфике дисциплины и требованиям к выпускникам.

Промежуточная аттестация знаний *бакалавра*, предусмотренная Программой, осуществляется в форме *экзамена*. Формы оценки знаний, представленные в Рабочей программе, соответствуют специфике дисциплины и требованиям к выпускникам.

Учебно-методическое обеспечение дисциплины представлено основной, дополнительной литературой, интернет-ресурсами и соответствует требованиям ФГОС ВО направления подготовки **38.03.01 «Экономика»** направленность (профиль) *«Ценообразование и сметное дело в строительстве», «Бухгалтерский учет, анализ и аудит».*

Материально-техническое обеспечение соответствует требованиям ФГОС ВО направления подготовки **38.03.01 «Экономика»** и специфике дисциплины *«Линейная алгебра»* и обеспечивает использование современных образовательных, в том числе интерактивных методов обучения.

Представленные на рецензию оценочные и методические материалы направления подготовки **38.03.01 «Экономика»**, направленность (профиль) *«Ценообразование и сметное дело в строительстве», «Бухгалтерский учет, анализ и аудит»* разработаны в соответствии с нормативными документами, представленными в Программе. Оценочные и методические материалы по дисциплине *«Линейная алгебра»* предназначены для текущего контроля и промежуточной аттестации и представляют собой совокупность разработанных кафедрой *«Системы автоматизированного проектирования и моделирования»* материалов для установления уровня и качества достижения обучающимися результатов обучения.

Задачами оценочных и методических материалов является контроль и управление процессом освоения обучающимися компетенций, заявленных в образовательной программе по направлению подготовки **38.03.01 «Экономика»**, направленность (профиль) *«Ценообразование и сметное дело в строительстве», «Бухгалтерский учет, анализ и аудит».*

Оценочные и методические материалы по дисциплине *«Линейная алгебра»* представлены вопросами к экзамену, заданиями к контрольной работе, заданиями к входному и итоговому тестированию, заданиями к практическим занятиям, типовыми заданиями к защите лабораторных работ.

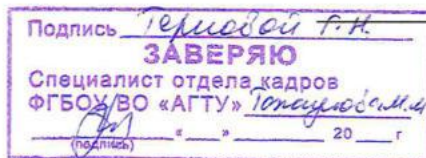
Данные материалы позволяют в полной мере оценить результаты обучения по дисциплине *«Линейная алгебра»* в АГАСУ, а также оценить степень сформированности компетенций.

ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

На основании проведенной рецензии можно сделать заключение, что характер, структура и содержание рабочей программы, оценочных и методических материалов дисциплины **Б1.О.08 «Линейная алгебра»** ОПОП ВО по направлению **38.03.01 «Экономика»** по программе *бакалавриата*, разработанные *старшим преподавателем Череповской Ириной Анатольевной* соответствуют требованиям ФГОС ВО, современным требованиям отрасли, рынка труда, профессиональных стандартов направления подготовки **38.03.01 «Экономика»**, направленность (профиль) *«Ценообразование и сметное дело в строительстве», «Бухгалтерский учет, анализ и аудит»* и могут быть рекомендованы к использованию.

Рецензент:

кандидат технических наук, доцент
кафедры «Высшая и прикладная математика»
ФГБОУ ВО «Астраханский государственный
технический университет»




(подпись)

Терновая Г.Н. /
(Ф. И. О.)

Министерство образования и науки Астраханской области
Государственное бюджетное образовательное учреждение
Астраханской области высшего образования
«Астраханский государственный архитектурно-строительный
университет»
(ГБОУ АО ВО «АГАСУ»)

УТВЕРЖДАЮ

И.о. ректора



/ С.П. Стрелков /

(подпись)

И. О. Ф

« 18 » апреля 2025 г.

ОЦЕНОЧНЫЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Наименование дисциплины

Линейная алгебра

(указывается наименование в соответствии с учебным планом)

По направлению подготовки

38.03.01 «Экономика»

(указывается наименование направления подготовки в соответствии с ФГОС ВО)

Направленность (профиль)

«Ценообразование и сметное дело в строительстве»

«Бухгалтерский учет, анализ и аудит»

(указывается наименование направленности (профиля) в соответствии с ОПОП)

Кафедра

Системы автоматизированного проектирования и моделирования

Квалификация выпускника *бакалавр*

Разработчик:

ст. преподаватель
(занимаемая должность,
учёная степень и учёное звание)


(подпись)

/ И.А. Череповская /
И. О. Ф.

Оценочные и методические материалы рассмотрены и утверждены на заседании кафедры
«Системы автоматизированного проектирования и моделирования»
протокол № 9 от «14» апреля 2025 г.

И.о. заведующего кафедрой


(подпись)

/ В.В. Соболева /
И. О. Ф.

Согласовано:

Председатель МКН «Экономика»
направленность (профиль) «Ценообразование и сметное дело в строительстве»,
направленность (профиль) «Бухгалтерский учет, анализ и аудит»


(подпись) / И.А. Митченко /
И. О. Ф

Начальник УМУ 
(подпись) / О.Н. Беспалова /
И. О. Ф

Специалист УМУ 
(подпись) / С.А. Ларин /
И. О. Ф

СОДЕРЖАНИЕ:

	Стр.
1. Оценочные и методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине	4
1.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы	4
1.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания	6
1.2.1. Перечень оценочных средств текущего контроля успеваемости	6
1.2.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций по дисциплине на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания	7
1.2.3. Шкала оценивания	10
2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы	11
3. Перечень и характеристики процедуры оценивания знаний, умений, навыков, характеризующих этапы формирования компетенций	15
<i>Приложение 1</i>	16
<i>Приложение 2</i>	18
<i>Приложение 3</i>	19
<i>Приложение 4</i>	22
<i>Приложение 5</i>	29

1. Оценочные и методические материалы для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Оценочные и методические материалы являются неотъемлемой частью рабочей программы дисциплины (далее РПД) и представлены в виде отдельного документа

1.1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы

Индекс и формулировка компетенции N	Номер и наименование результатов образования по дисциплине (в соответствии с разделом 2)	Номер раздела дисциплины (в соответствии с п.5.1 РПД)								Формы контроля с конкретизацией задания
		1	2	3	4	5	6	7	8	
		3	4	5	6	7	8	12		
УК – 1 - способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	знать: методики поиска, сбора и обработки информации, метод системного анализа (31 УК-1.1)									
		X	X	X	X	X	X		X	Комплект заданий для тестов (итоговое тестирование) (1-5) Вопросы к экзамену (1-10; 50-59)
	уметь: применять методики поиска, сбора, обработки информации, системный подход для решения поставленных задач и осуществлять критический анализ и синтез информации, полученной из актуальных российских и зарубежных источников (У1 УК-1.2)	X	X		X					Комплект заданий для тестов (итоговое тестирование) (6-10) Вопросы к экзамену (11-17; 35-49) Защита лабораторных работ № 1;2;4.

ОПК – 2 - Способен осуществлять сбор, обработку и статистический анализ данных, необходимых для решения поставленных экономических задач	владеть: методами поиска, сбора и обработки, критического анализа и синтеза информации, методикой системного подхода для решения поставленных задач (В1 УК-1.3)						X	X	X	Комплект заданий для тестов (итоговое тестирование) (11-15) Контрольная работа (задания 1 и 6) Защита лабораторных работ № 5;6;7;8
	знать: методы сбора, обработки и анализа данных, необходимых для решения управленческих задач (31 ОПК-2.1)						X	X		Комплект заданий для тестов (итоговое тестирование) (11-15) Вопросы к экзамену (18-24)
	современные интеллектуально - поисковые системы (32 ОПК-2.1)						X	X		Комплект заданий для тестов (итоговое тестирование) (21-25) Вопросы к экзамену (18-24; 50-59)
	уметь: выбирать и использовать адекватные содержанию профессиональных задач методы обработки и анализа данных (У1 ОПК-2.2)						X	X	X	Комплект заданий для тестов (итоговое тестирование) (26-30) Вопросы к экзамену (11-17; 25-34) Защита лабораторной работы №3
	владеть: способами статистической обработки и интеллектуального анализа информации, необходимой для принятия обоснованных организационно-управленческих решений (В1 ОПК-2.3)						X	X		Комплект заданий для тестов (итоговое тестирование) (31-44) Контрольная работа (задания 3; 4; 5 и 6) Защита лабораторной работы №2

1.2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

1.2.1. Перечень оценочных средств текущего контроля успеваемости

Наименование оценочного средства	Краткая характеристика оценочного средства	Представление оценочного средства в фонде
1	2	3
Контрольная работа	Средство проверки умений применять полученные знания для решения задач определенного типа по теме или разделу	Комплект контрольных заданий по вариантам
Тест	Система стандартизированных заданий, позволяющая автоматизировать процедуру измерения уровня знаний и умений обучающегося	Фонд тестовых заданий
Защита лабораторной работы	Средство, позволяющее оценить умение и владение обучающегося излагать суть поставленной задачи, самостоятельно применять стандартные методы решения поставленной задачи с использованием имеющейся лабораторной базы, проводить анализ полученного результата работы. Рекомендуются для оценки умений и владений студентов	Темы лабораторных работ и требования к защите

1.2.2 Описание показателей и критериев оценивания компетенций по дисциплине на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Компетенция, этапы освоения компетенций	Планируемые результаты обучения	Показатели и критерии оценивания результатов обучения			
		Ниже порогового уровня (не зачтено)	Пороговый уровень (Зачтено)	Продвинутый уровень (Зачтено)	Высокий уровень (Зачтено)
1	2	3	4	5	6
УК – 1- Способностью осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач.	Знает методики поиска, сбора и обработки информации, метод системного анализа (31 УК-1.1)	Обучающийся не знает и не понимает методики поиска, сбора и обработки информации, метод системного анализа.	Обучающийся знает методики поиска, сбора и обработки информации, метод системного анализа в типовых ситуациях.	Обучающийся знает и понимает методики поиска, сбора и обработки информации, метод системного анализа в типовых ситуациях и ситуациях повышенной сложности.	Обучающийся знает и понимает методики поиска, сбора и обработки информации, метод системного анализа в типовых ситуациях и ситуациях повышенной сложности, а также в нестандартных и непредвиденных ситуациях, создавая при этом новые правила и алгоритмы действий.
	Умеет применять методики поиска, сбора, обработки информации, системный подход для решения поставленных задач и осуществлять критический анализ и синтез информации, полученной из актуальных российских и зарубежных источников (У1 УК-1.2)	Обучающийся не умеет применять методики поиска, сбора, обработки информации, системный подход для решения поставленных задач и осуществлять критический анализ и синтез информации, полученной из актуальных российских и зарубежных источников.	Обучающийся умеет применять методики поиска, сбора, обработки информации, системный подход для решения поставленных задач и осуществлять критический анализ и синтез информации, полученной из актуальных российских и зарубежных источников в типовых ситуациях.	Обучающийся умеет применять методики поиска, сбора, обработки информации, системный подход для решения поставленных задач и осуществлять критический анализ и синтез информации, полученной из актуальных российских и зарубежных источников в ситуациях повышенной сложности.	Обучающийся умеет применять методики поиска, сбора, обработки информации, системный подход для решения поставленных задач и осуществлять критический анализ и синтез информации, полученной из актуальных российских и зарубежных источников в ситуациях повышенной сложности, а также в нестандартных и непредвиденных ситуациях, создавая при этом новые правила и алгоритмы действий.

							Обучающийся владеет методами поиска, сбора и обработки, критического анализа и синтеза информации, методикой системного подхода для решения поставленных задач в типовых ситуациях и ситуациях повышенной сложности, а также в нестандартных и непредвиденных ситуациях, создавая при этом новые правила и алгоритмы действий.
						Обучающийся владеет методами поиска, сбора и обработки, критического анализа и синтеза информации, методикой системного подхода для решения поставленных задач в типовых ситуациях и ситуациях повышенной сложности.	Обучающийся знает и понимает методы сбора, обработки и анализа данных, необходимых для решения управленческих задач в ситуациях повышенной сложности, а также в нестандартных и непредвиденных ситуациях, создавая при этом новые правила и алгоритмы действий.
						Обучающийся владеет методами поиска, сбора и обработки, критического анализа и синтеза информации, методикой системного подхода для решения поставленных задач в типовых ситуациях.	Обучающийся знает и понимает методы сбора, обработки и анализа данных, необходимых для решения управленческих задач в типовых ситуациях и ситуациях повышенной сложности.
						Обучающийся не владеет методами поиска, сбора и обработки, критического анализа и синтеза информации, методикой системного подхода для решения поставленных задач.	Обучающийся знает методы сбора, обработки и анализа данных, необходимых для решения управленческих задач в типовых ситуациях.
						Владеет методами поиска, сбора и обработки, критического анализа и синтеза информации, методикой системного подхода для решения поставленных задач (В1 УК-1.3)	Знает методы сбора, обработки и анализа данных, необходимых для решения управленческих задач (З1 ОПК-2.1)
						ОПК – 2- Способностью осуществлять сбор, обработку и статистический анализ данных, необходимых для решения поставленных экономических задач.	

Знает современные интеллектуально-поисковые системы (32 ОПК-2.1)	Обучающийся не знает и не понимает современные интеллектуально-поисковые системы.	Обучающийся знает современные интеллектуально-поисковые системы в типовых ситуациях.	Обучающийся знает и понимает современные интеллектуально-поисковые системы в типовых ситуациях и ситуациях повышенной сложности.	Обучающийся знает и понимает современные интеллектуально-поисковые системы в ситуациях повышенной сложности, а также в нестандартных и непредвиденных ситуациях, создавая при этом новые правила и алгоритмы действий.
Умеет выбирать и использовать адекватные содержанию профессиональных задач методы обработки и анализа данных (У1 ОПК-2.2)	Обучающийся не умеет выбирать и использовать адекватные содержанию профессиональных задач методы обработки и анализа данных.	Обучающийся умеет выбирать и использовать адекватные содержанию профессиональных задач методы обработки и анализа данных в типовых ситуациях.	Обучающийся умеет выбирать и использовать адекватные содержанию профессиональных задач методы обработки и анализа данных в типовых ситуациях и ситуациях повышенной сложности.	Обучающийся умеет выбирать и использовать адекватные содержанию профессиональных задач методы обработки и анализа данных в ситуациях повышенной сложности, а также в нестандартных и непредвиденных ситуациях, создавая при этом новые правила и алгоритмы действий.
Владеет способами статистической обработки и интеллектуального анализа информации, необходимой для принятия обоснованных организационно-управленческих решений (В1 ОПК-2.3)	Обучающийся не владеет способами статистической обработки и интеллектуального анализа информации, необходимой для принятия обоснованных организационно-управленческих решений.	Обучающийся владеет способами статистической обработки и интеллектуального анализа информации, необходимой для принятия обоснованных организационно-управленческих решений в типовых ситуациях.	Обучающийся владеет способами статистической обработки и интеллектуального анализа информации, необходимой для принятия обоснованных организационно-управленческих решений в типовых ситуациях и ситуациях повышенной сложности.	Обучающийся владеет способами статистической обработки и интеллектуального анализа информации, необходимой для принятия обоснованных организационно-управленческих решений в ситуациях повышенной сложности, а также в нестандартных и непредвиденных ситуациях, создавая при этом новые правила и алгоритмы действий.

1.2.3. Шкала оценивания

Уровень достижений	Отметка в 5-балльной шкале	Зачтено/ не зачтено
высокий	«5»(отлично)	зачтено
продвинутый	«4»(хорошо)	зачтено
пороговый	«3»(удовлетворительно)	зачтено
ниже порогового	«2»(неудовлетворительно)	не зачтено

2. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ:

2.1. Экзамен

а) типовые вопросы к экзамену (Приложение 1)

б) критерии оценивания

При оценке знаний на экзамене учитывается:

1. Уровень сформированности компетенций.
2. Уровень усвоения теоретических положений дисциплины, правильность формулировки основных понятий и закономерностей.
3. Уровень знания фактического материала в объеме программы.
4. Логика, структура и грамотность изложения вопроса.
5. Умение связать теорию с практикой.
6. Умение делать обобщения, выводы.

№ п/п	Оценка	Критерии оценки
1	Отлично	Ответы на поставленные вопросы излагаются логично, последовательно и не требуют дополнительных пояснений. Полно раскрываются причинно-следственные связи между явлениями и событиями. Делаются обоснованные выводы. Демонстрируются глубокие знания базовых нормативно-правовых актов. Соблюдаются нормы литературной речи.
2	Хорошо	Ответы на поставленные вопросы излагаются систематизировано и последовательно. Базовые нормативно-правовые акты используются, но в недостаточном объеме. Материал излагается уверенно. Раскрыты причинно-следственные связи между явлениями и событиями. Демонстрируется умение анализировать материал, однако не все выводы носят аргументированный и доказательный характер. Соблюдаются нормы литературной речи.
3	Удовлетворительно	Допускаются нарушения в последовательности изложения. Имеются упоминания об отдельных базовых нормативно-правовых актах. Неполно раскрываются причинно-следственные связи между явлениями и событиями. Демонстрируются поверхностные знания вопроса, с трудом решаются конкретные задачи. Имеются затруднения с выводами. Допускаются нарушения норм литературной речи.
4	Неудовлетворительно	Материал излагается непоследовательно, сбивчиво, не представляет определенной системы знаний по дисциплине. Не раскрываются причинно-следственные связи между явлениями и событиями. Не проводится анализ. Выводы отсутствуют. Ответы на дополнительные вопросы отсутствуют. Имеются заметные нарушения норм литературной речи.

ТИПОВЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ:

2.2. Контрольная работа

а) типовые задания к контрольным работам (Приложение 2).

б) критерии оценивания

Выполняется в письменной форме. При оценке работы студента учитывается:

1. Правильное решение задач.
2. Самостоятельность суждений, творческий подход, научное обоснование раскрываемой проблемы.
3. Правильность использования цитат (если цитата приводится дословно, то надо взять ее в кавычки и указать источник с указанием фамилии автора, названия произведения, места и города издания, тома, части, параграфа, страницы).
4. Наличие в конце работы полного списка литературы.

№ п/п	Оценка	Критерии оценки
1	Отлично	Студент выполнил работу без ошибок и недочетов, допустил не более одного недочета
2	Хорошо	Студент выполнил работу полностью, но допустил в ней не более одной негрубой ошибки и одного недочета, или не более двух недочетов
3	Удовлетворительно	Студент правильно выполнил не менее половины работы или допустил не более двух грубых ошибок, или не более одной грубой и одной негрубой ошибки и одного недочета, или не более двух-трех негрубых ошибок, или одной негрубой ошибки и трех недочетов, или при отсутствии ошибок, но при наличии четырех-пяти недочетов, плохо знает материал, допускает искажение фактов
4	Неудовлетворительно	Студент допустил число ошибок и недочетов превосходящее норму, при которой может быть выставлена оценка «3», или если правильно выполнил менее половины работы
5	Зачтено	Выполнено правильно не менее 50% заданий, работа выполнена по стандартной или самостоятельно разработанной методике, в освещении вопросов не содержится грубых ошибок, по ходу решения сделаны аргументированные выводы, самостоятельно выполнена графическая часть работы
6	Не зачтено	Студент не справился с заданием (выполнено правильно менее 50% задания варианта), не раскрыто основное содержание вопросов, имеются грубые ошибки в освещении вопроса, в решении задач, в выполнении графической части задания и т.д., а также выполнена не самостоятельно.

2.3. Тест

- а) *типовой комплект заданий для входного тестирования (Приложение 3) типовой комплект заданий для итогового тестирования (Приложение 4)*
б) *критерии оценивания*

При оценке знаний по результатам тестов учитывается:

1. Уровень сформированности компетенций.
2. Уровень усвоения теоретических положений дисциплины, правильность формулировки основных понятий и закономерностей.
3. Уровень знания фактического материала в объеме программы.
4. Логика, структура и грамотность изложения вопроса.
5. Умение связать теорию с практикой.
6. Умение делать обобщения, выводы.

№ п/п	Оценка	Критерии оценки
1	Отлично	если выполнены следующие условия: - даны правильные ответы не менее чем на 90% вопросов теста, исключая вопросы, на которые студент должен дать свободный ответ; - на все вопросы, предполагающие свободный ответ, студент дал правильный и полный ответ.
2	Хорошо	если выполнены следующие условия: - даны правильные ответы не менее чем на 75% вопросов теста, исключая вопросы, на которые студент должен дать свободный ответ; - на все вопросы, предполагающие свободный ответ, студент дал правильный ответ, но допустил незначительные ошибки и не показал необходимой полноты.
3	Удовлетворительно	если выполнены следующие условия: - даны правильные ответы не менее чем на 50% вопросов теста, исключая вопросы, на которые студент должен дать свободный ответ; - на все вопросы, предполагающие свободный ответ, студент дал непротиворечивый ответ, или при ответе допустил значительные неточности и не показал полноты.
4	Неудовлетворительно	если студентом не выполнены условия, предполагающие оценку «Удовлетворительно».
5	Зачтено	Выставляется при соответствии параметрам экзаменационной шкалы на уровнях «отлично», «хорошо», «удовлетворительно».
6	Не зачтено	Выставляется при соответствии параметрам экзаменационной шкалы на «Неудовлетворительно»

2.4. Защита лабораторной работы

а) типовые задания к защите лабораторной работе (Приложение 5).

в) критерии оценивания.

При оценке знаний на защите лабораторной работе учитываются:

1. Уровень сформированности компетенций.
2. Уровень освоения теоретических положений дисциплины, правильность формулировок.
3. Уровень знания фактического материала в объеме программы.
4. Логика, структуры и грамотность изложения вопроса.
5. Умение связать теорию с практикой.
6. Умение делать обобщения, выводы.

№ п/п	Оценка	Критерии оценки
1	Отлично	Студент правильно называет метод исследования, правильно называет прибор, правильно демонстрирует метод исследования/измерения, правильно оценивает результат.
2	Хорошо	Студент правильно называет метод исследования, правильно называет прибор, допускает единичные ошибки в демонстрации метода исследования/измерения и оценке его результатов.
3	Удовлетворительно	Студент неправильно называет метод исследования, но при этом дает правильное название прибора. Допускает множественные ошибки в демонстрации метода исследования/измерения и оценке его результатов.
4	Неудовлетворительно	Студент неправильно называет метод исследования, дает не правильное название прибора. Не может продемонстрировать метод исследования/измерения, а так же оценить результат.

3. Перечень и характеристики процедуры оценивания знаний, умений, навыков, характеризующих этапы формирования компетенций

Процедура проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине регламентируется локальным нормативным актом.

Перечень и характеристика процедур текущего контроля и промежуточной аттестации по дисциплине

№	Наименование оценочного средства	Периодичность и способ проведения процедуры оценивания	Виды выставляемых оценок	Форма учета
1.	Экзамен	Раз в семестр (согласно учебному плану), по окончании изучения разделов дисциплины	по пятибалльной шкале	Ведомость, зачетная книжка Портфолио
2.	Контрольная работа	Систематически на занятиях (для очной формы обучения); По мере выполнения (для заочной формы обучения)	зачтено/ не зачтено	Журнал успеваемости преподавателя (для очной формы обучения) Тетрадь для выполнения контрольных работ (для заочной формы обучения)
3.	Защита лабораторной работы	Систематически на занятиях	по пятибалльной шкале	Лабораторная тетрадь. Журнал успеваемости преподавателя
4.	Тесты	Входное тестирование перед изучением дисциплины, итоговое тестирование раз в семестр, по окончании изучения дисциплины	зачтено/ не зачтено	Журнал успеваемости преподавателя (для очной формы обучения)

Типовые вопросы к экзамену по дисциплине

«Линейная алгебра»

(31 УК-1.1) Знать

1. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора
2. Базис линейного векторного пространства и координаты вектора
3. N-мерный вектор. Линейные операции над n -мерными векторами
4. N-мерное векторное пространство. Базис. Линейная независимость векторов
5. Матрица линейного оператора. Действия с линейными операторами
6. Евклидово пространство. Ортонормированный базис
7. Линейные операторы. Связь между матрицами линейного оператора в разных базисах
8. Проекция вектора на ось. Разложение вектора по ортам координатных осей
9. Прямая и плоскость в пространстве. Основные задачи
10. Уравнение прямой в пространстве. Основные задачи

(У1 УК-1.2; У1 ОПК-2.2) Уметь

11. Прямая на плоскости. Основные задачи
12. Канонические уравнения поверхностей второго порядка
13. Квадратичные формы
14. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений
15. Определители. Основные свойства определителей
16. Определители. Основные свойства определителей
17. Ранг матрицы. Линейная независимость рядов матрицы

(31 ОПК-2.1; 32 ОПК-2.1) Знать

18. Продуктивные модели Леонтьева
19. Балансовые соотношения. Линейная модель многоотраслевой экономики
20. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики
21. Определители. Основные свойства определителей
22. Линейные операции над матрицами. Элементарные преобразования матриц.
23. Квадратичные формы
24. Линии на плоскости. Линии второго порядка

(У1 ОПК-2.2) Уметь

25. Системы координат на плоскости. Преобразования системы координат
26. Прямая на плоскости. Основные задачи
27. Плоскость в трехмерном пространстве. Основные задачи
28. Прямая в пространстве. Основные задачи
29. Прямая и плоскость в пространстве. Основные задачи
30. Поверхности второго порядка
31. Канонические уравнения поверхностей второго порядка
32. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений
33. Нахождение общего решения неоднородных систем линейных уравнений
34. Нахождение общего решения систем линейных однородных уравнений

(У1 УК-1.2) Уметь

35. Определение линейной зависимости рядов матрицы
36. Определение линейной независимости рядов матрицы
37. Алгоритм нахождения обратной матрицы
38. Линейные операции над матрицами. Элементарные преобразования матриц
39. Деление отрезка в данном отношении
40. Преобразования системы координат
41. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора
42. Действия с линейными операторами
43. Базис линейного векторного пространства. Переход к новому базису
44. Линейные операции над n-мерными векторами
45. Скалярное произведение векторов и его свойства
46. Разложение вектора по ортам координатных осей
47. Нахождение общего решения неоднородных систем линейных уравнений
48. Нахождение общего решения систем линейных однородных уравнений
49. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений

(31 УК-1.1; 32 ОПК-2.1) Знать

50. Формулы Крамера для решения систем линейных алгебраических уравнений
51. Матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений
52. Определение линейной зависимости рядов матрицы
53. Определение линейной независимости рядов матрицы
54. Определения ранга матрицы
55. Алгоритм нахождения обратной матрицы
56. Алгоритм вычисления определителей
57. Умножение матриц
58. Линейные операции над матрицами. Элементарные преобразования матриц
59. Действия с матрицами. Операция транспонирования

**Типовые задания по выполнению контрольной работы
по дисциплине «Линейная алгебра»**

(В1 УК-1.3) Владеть.

Задание 1.

Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

Доказать её совместность и решить двумя способами:

- 1) Методом Гаусса; 2) средствами матричного исчисления.

Задание 2.

Даны векторы $\mathbf{a}=(1; 2; 3)$, $\mathbf{b}=(-1; 3; 2)$, $\mathbf{c}=(7; -3; 5)$ и $\mathbf{d}=(6; 10; 17)$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\mathbf{d}$ в этом базисе.

(В1 ОПК-2.3) Владеть

Задание 3.

Даны координаты вершины пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(4; 2; 5)$, $A_2(0; 7; 2)$, $A_3(0; 2; 7)$, $A_4(1; 5; 0)$.

Найти: 1) длину ребра A_1A_2 ; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 ; 3) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 4) площадь грани $A_1A_2A_3$; 5) объем пирамиды; 6) уравнение прямой A_1A_2 ; 7) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 8) уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Задание 4.

Уравнение одной из сторон квадрата $x + 3y - 5 = 0$. Составить уравнения трех остальных сторон квадрата, если $P(-1; 0)$ – точка пересечения его диагоналей.

Задание 5.

Составить уравнение и построить линию, расстояния каждой точки которой от начала координат и от точки $A(5; 0)$ относятся как 2:1.

Задание 6.

Даны два линейных преобразования:

$$\begin{cases} x_1 = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3, \\ x_2 = 6x_1 + 7x_2 + x_3, \\ x_3 = 9x_1 + x_2 + 8x_3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1'' = -x_1' + 3x_2' - 2x_3', \\ x_2'' = -4x_1' + x_2' + 2x_3', \\ x_3'' = 3x_1' + 4x_2' + 5x_3'. \end{cases}$$

Средствами матричного исчисления найти преобразование, выражающее x_1'', x_2'', x_3'' через x_1, x_2, x_3 .

Типовой комплект заданий

Полный комплект тестовых материалов по входному тестированию размещен на образовательном портале «АГАСУ»

Типовые тесты для входного тестирования

1. Область определения функции это все множество таких x , в которых функция:

- 1) достигает максимума
- 2) достигает минимума
- 3) не определена
- 4) отрицательна

2. Квадрат суммы двух чисел равен:

- 1) $(a + b)^2 = a^2 + b^2$
- 2) $(a + b)^2 = a^2 - b^2$
- 3) $(a + b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- 4) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

3. Куб суммы двух чисел равен:

- 1) $(a + b)^3 = a^3 + b^3$
- 2) $(a + b)^3 = a^3 - b^3$
- 3) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- 4) $(a + b)^3 = a^3 - 2ab + b^3$

4. Куб разности двух чисел равен:

- 1) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- 2) $(a - b)^3 = a^3 - b^3$
- 3) $(a - b)^3 = a^3 + 3a^2b - 3ab^2 - b^3$
- 4) $(a - b)^3 = a^3 - 2ab - b^3$

5. При умножении степеней показателя:

- 1) вычитаются
- 2) складываются
- 3) перемножаются
- 4) делятся друг на друга

6. Вычислить: $\sqrt[3]{\frac{9}{2}} * \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$:

- 1) 6
- 2) 3
- 3) 1.5
- 4) 2

7. Вычислить $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$:

- 1) 2
- 2) -0.5
- 3) 1.5
- 4) 0.5

8. Вычислить $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$:

- 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 2) -0.5
- 3) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 4) 0

9. Вычислить $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)$:

- 1) -2
- 2) 1
- 3) -1
- 4) 2

10. Площадь параллелограмма равна:

- 1) произведению сторон
- 2) произведению суммы сторон на высоту
- 3) произведению высоты на основание
- 4) произведению полусуммы сторон на высоту

11. Площадь трапеции равна:

- 1) произведению полусуммы боковых сторон на высоту
- 2) произведению полусуммы длин оснований на высоту
- 3) произведению высоты на большее основание
- 4) произведению суммы боковых сторон на высоту

12. Объем пирамиды равен:

- 1) произведению одной трети площади боковой поверхности на высоту
- 2) произведению площади основания на высоту
- 3) произведению одной трети площади основания на высоту
- 4) произведению площади боковой поверхности на высоту

13. Формула Герона для площади треугольника такова:

- 1) $S = \frac{1}{2} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
- 2) $S = \sqrt[3]{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
- 3) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
- 4) $S = \sqrt[4]{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

14. Укажите теорему Виета для корней квадратного уравнения: $x^2 + px + q = 0$:

- 1) $x_1 x_2 = p$; $x_1 + x_2 = q$
- 2) $x_1 x_2 = q$; $x_1 + x_2 = p$
- 3) $x_1 x_2 = -p$; $x_1 + x_2 = q$
- 4) $x_1 x_2 = q$; $x_1 + x_2 = -p$

15. Решите неравенство: $x^2 - 6x + 8 < 0$:

- 1) $x \in (-2; 3)$
- 2) $x \in (-1; 8)$
- 3) $x \in (2; 3)$
- 4) $x \in (1; 8)$

16. Решите неравенство $\frac{x-3}{x-1} - 2 > 0$:

- 1) $x \in (-2; 2)$
- 2) $x \in (-1; 1)$
- 3) $x \in (-4; 1)$
- 4) $x \in (2; 1)$

17. Решите систему: $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

- 1) $x = -2; y = 3$
- 2) $x = 4; y = 2$
- 3) $x = 1; y = -4$
- 4) $x = 2; y = 4$

18. Если (x_0, y_0) – решение системы линейных уравнений $\begin{cases} 3x - 4y = 15 \\ x - 4y = 9 \end{cases}$, тогда $x_0 + y_0$ равно...

- 1. 4,5
- 2. -1,5
- 3. -4,5
- 4. 1,5

19. Дана система линейных уравнений $\begin{cases} ax - 3y = 2 \\ 4x - 6y = 2 \end{cases}$. Система не имеет решений при a равно...

- 1. 2
- 2. 0,5
- 3. 0
- 4. -2

20. Система $\begin{cases} 3x + ay = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$ имеет ненулевое решение при ...

- 1. $a = -9$
- 2. $a = \pm 3$
- 3. $a = 0$
- 4. $a = 9$

Типовой комплект заданий для тестов

Полный комплект тестовых материалов по итоговому тестированию размещен на образовательном портале «АГАСУ»

Типовые тесты для итогового тестирования

Знает (31 Ук-1.1)

1. При перестановке строк определитель:

- 1) Не меняет знак
- 2) Меняет знак на противоположный
- 3) Равен нулю
- 4) Стал положительным

2. Укажите вектор нормали n для уравнения прямой: $2x + 3y + 15 = 0$. В ответ запишите сумму координат вектора нормали.

3. Определитель $\begin{vmatrix} 0 & a_2 & 0 \\ 1 & 5 & -3 \\ c_1 & 0 & c_2 \end{vmatrix}$ равен...

- 1) $-3a_2c_1 + a_2c_2$
- 2) $3a_2c_1 - a_2c_2$
- 3) $3a_2c_1 + a_2c_2$
- 4) $-3a_2c_1 - a_2c_2$

4. Уравнение плоскости проходящей через три заданные точки $(x_1; y_1; z_1), (x_2; y_2; z_2), (x_3; y_3; z_3)$ имеет вид:

- 1) $\begin{vmatrix} x - x_1 & y_3 - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$
- 2) $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$
- 3) $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0$
- 4) $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ y - y_1 & x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$

5. Определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5\alpha - 1 \end{vmatrix}$ равен 0, если α равно ...

Умеет (У1 Ук-1.2)

6. Таблица знаков алгебраических дополнений для определителя третьего порядка такова:

$$\left| \begin{matrix} 1) & \begin{pmatrix} + & + & + \\ - & - & - \\ + & + & + \end{pmatrix} & 2) & \begin{pmatrix} - & - & - \\ + & + & + \\ - & - & - \end{pmatrix} & 3) & \begin{pmatrix} - & + & - \\ + & - & + \\ - & + & - \end{pmatrix} & 4) & \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \end{matrix} \right|$$

7. Элемент $a_{2,4}$ матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 & 0 \\ 5 & 8 & 3 & 6 & 5 \\ 8 & 9 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ равен:

- 1) 6
- 2) 4
- 3) 9
- 4) 8

8. Минор $M_{2,3}$ матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ равен:

9. Алгебраическое дополнение $A_{i,j}$ отличается от минора $M_{i,j}$ знаком в случае когда:

- 1) Разность индексов четное число
- 2) Сумма индексов не четное число
- 3) Сумма индексов четное число
- 4) Произведение индексов четное число

10. Определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 10 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ равен:

Владеет (В1 Ук-1.3)

11. Определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ равен:

- 1) 12 2) 0 3) -12 4) 7

12. Определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ равен:

- 1) 10 2) -30 3) -10 4) 0

13. Обратная матрица к матрице $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 4 \\ 6 & 5-\alpha & 12 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ не существует при α , равном ...

14. Пусть A и B – обратимые квадратные матрицы одного порядка. Тогда решением матричного уравнения $AX = 2B$ является матрица...

- 1) $\frac{1}{2}A^{-1}B$
- 2) $\frac{1}{2}BA^{-1}$
- 3) $2BA^{-1}$
- 4) $2A^{-1}B$

15. Определитель четвертого порядка $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 8 & 4 \end{vmatrix}$ равен:

Знает (31 Опк-2.1)

16. Геометрический смысл определителя третьего порядка. Модуль определителя третьего порядка это есть:

- 1) Объем параллелепипеда
- 2) Объем пирамиды
- 3) Площадь поверхности пирамиды
- 4) Площадь поверхности параллелепипеда

17. Вектор $\vec{N}(p, 5)$ перпендикулярен прямой $2x - y - 1 = 0$. Тогда значение p равно ...

18. Вектор $\vec{S}(p, -3)$ параллелен прямой $\frac{x-5}{2} = \frac{y+10}{-3}$. Тогда значение p равно ...

- 1) 2
- 2) -4,5
- 3) -2
- 4) -6

19. Расстояние между фокусами эллипса $16x^2 + 25y^2 = 400$ равно ...

20. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $(x_0; y_0), (x_1; y_1)$ имеет вид:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{y_0 - x}{y_1 - y_0} = \frac{y - x_0}{x_1 - x_0} & 3) \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \\ 2) \frac{y_0 - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - x}{y_1 - y_0} & 4) \frac{y_0 - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - x}{y_1 - y_0} \end{array}$$

Знает (32 Опк-2.1)

21. Уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{a} & 3) ax + by + c = 0 \\ 2) y = kx + b & 4) \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \end{array}$$

22. Что такое нормаль к плоскости?

- 1) Это вектор параллельный плоскости.
- 2) Это вектор перпендикулярный плоскости.
- 3) Это число равное расстоянию от этой плоскости до начала координат;
- 4) Это корень уравнения плоскости.

23. Укажите вектор нормали n для уравнения плоскости в общем виде: $ax + by + cz + d = 0$.

$$\begin{array}{ll} 1) n = (-a; b; c) & 3) n = (b; a; c) \\ 2) n = (a; -b; c) & 4) n = (a; b; c) \end{array}$$

24. Расстояние d от заданной точки $(x_0; y_0; z_0)$ до заданной плоскости $ax + by + cz + r = 0$ вычисляется по формуле:

$$\begin{array}{ll} 1) d = \frac{ax_0 + by_0 + cz + r}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} & 3) d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz + r|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ 2) d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz + r|}{a^2 + b^2 + c^2} & 4) d = \frac{ax_0 + by_0 + cz + r}{a^2 + b^2 + c^2} \end{array}$$

25. Найдите расстояние от точки $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ до плоскости $x + 2y + 2z + 7 = 0$.

Умеет (У1 ОПК-2.2)

26. Найти угол наклона прямой в градусах: $y = x + 10$.

$$1) 30 \quad 2) 45 \quad 3) 60 \quad 4) 90$$

27. Найти точку пересечения прямой $y = 8x + 2$ с осью ОУ. В ответ записать координату y найденной точки.

28. Если $O(-5, 3, 4)$ – центр сферы, то ее уравнение может иметь вид ...

$$\begin{array}{l} 1) x^2 + 10x + y^2 - 6y + z^2 - 8z + 34 = 0 \\ 2) x^2 - 5x + y^2 + 3y + z^2 + 4z - 25 = 0 \\ 3) x^2 + 10x + y^2 - 6y + z^2 + 8z + 34 = 0 \\ 4) x^2 + 10x + y^2 - 6y + z^2 - 8z + 46 = 0 \end{array}$$

29. Найти точку пересечения плоскости $z = 3x + 4y - 9$ с осью x . В ответ записать координату x найденной точки.

30. Если первый столбец исходного определителя умножить на 5, а вторую строку умножить на 3, то, как он изменится?

- 1) Не изменится
- 2) Увеличится в 15 раз
- 3) Вырастет в 8 раз
- 4) Увеличится на 8

Владеет (В1 Опк-2.3)

31. Каноническое уравнение прямой с направляющим вектором $e = (e_x; e_y; e_z)$ и заданной начальной точкой $(x_0; y_0; z_0)$ имеет вид:

$$\begin{array}{ll}
 1) \frac{y_0 - x}{e_y} = \frac{y - x_0}{e_x} = \frac{z - z_0}{e_z} & 3) \frac{y_0 - x_0}{e_y} = \frac{y - x}{e_x} = \frac{z - z_0}{e_z} \\
 2) \frac{y_0 - x_0}{e_x} = \frac{y - x}{e_y} = \frac{z - z_0}{e_z} & 4) \frac{x - x_0}{e_x} = \frac{y - y_0}{e_y} = \frac{z - z_0}{e_z}
 \end{array}$$

32. Параметрическое уравнение прямой с заданной начальной точкой $(x_0; y_0; z_0)$, параметром t и направляющим вектором $e = (e_x; e_y; e_z)$ имеет вид:

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{cases} x = x_0 + te_y \\ y = y_0 + te_x \\ z = z_0 + te_z \end{cases} & 3) \begin{cases} x = x_0 + te_x \\ y = y_0 + te_y \\ z = z_0 + te_z \end{cases} \\
 2) \begin{cases} x = e_x + tx_0 \\ y = e_y + ty_0 \\ z = z_0 + te_z \end{cases} & 4) \begin{cases} x = e_x + ty_0 \\ y = e_y + tx_0 \\ z = z_0 + te_z \end{cases}
 \end{array}$$

33. Уравнение прямой, заданной как пересечение двух плоскостей, имеет вид:

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{cases} a_1 x^2 + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases} & 3) \begin{cases} a_1 x^2 + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z^3 + d_2 = 0 \end{cases} \\
 2) \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases} & 4) \begin{cases} a_1 x + b_1 \sqrt{y} + c_1 z + d_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0 \end{cases}
 \end{array}$$

34. Найти точку пересечения плоскости $z = 2x + 5y + 7$ с осью z . В ответ записать координату z .

35. Найти точку пересечения плоскости $z = 4x + 2y - 8$ с осью y . В ответ записать координату y .

36. Уравнение плоскости в отрезках имеет вид:

$$\begin{array}{ll}
 1) \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 & 3) z = kx + b \\
 2) \frac{x - x_0}{e_x} = \frac{y - y_0}{e_y} = \frac{z - z_0}{e_z} & 4) ax + by + cz + d = 0
 \end{array}$$

37. Найдите расстояние от точки $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ до плоскости $-2x + y - 2z + 10 = 0$.

38. Найдите расстояние от точки $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ до плоскости $-2x - 2y - z + 3 = 0$.

39. Найдите расстояние от точки $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ до прямой $5x + 12y + 7 = 0$.

40. Найдите расстояние от точки $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ до прямой $-12x + 5y + 20 = 0$.

41. Обратная матрица к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 \\ -3 & 7 & 1 \\ -6 & 14 & 2 - \alpha \end{pmatrix}$ не существует при α , равном ...

42. Обратная матрица к матрице $A = \begin{pmatrix} -\alpha & 6 & -7 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & -12 & 14 \end{pmatrix}$ не существует при α , равном ...

- 1) 2
- 2) 0
- 3) 1
- 4) -1

43. Обратная матрица к матрице $A = \begin{pmatrix} -5 & -\alpha & 1 \\ 2 & -8 & 12 \\ -4 & 16 & 9 \end{pmatrix}$ не существует при α , равном ...

- 1) -20
- 2) -18
- 3) 20
- 4) 38

44. Обратная матрица к матрице $A = \begin{pmatrix} -7 & 1 & 28 \\ 4 & 6 & -16 \\ \alpha & 33 & 32 \end{pmatrix}$ не существует при α , равном

- 1) -8
- 2) 8
- 3) 0
- 4) 24

Комплект типовых заданий к защите лабораторной работы

Лабораторная работа №1 МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Уметь (У1 УК-1.2)

Теоретический материал.

Всякая система $m \cdot n$, расположенных в виде прямоугольной таблицы, содержащей m строк и n столбцов, называется *матрицей* размера $m \times n$ и записывается в виде:

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & a_{mn} \end{pmatrix} = \{a_{ij}\} \quad \begin{matrix} i = 1..m \\ j = 1..n \end{matrix}$$

2) Матрица размера $m \times m$ (количество строчек равно количеству столбиков) называется *квадратной матрицей* порядка m .

3) Диагональ квадратной матрицы, идущая от левого верхнего угла к правому нижнему, называется *главной диагональю*, а вторая диагональ называется *побочной*.

4) Квадратная матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, а остальные цифры нули, называется *единичной матрицей* и обозначается следующим образом:

$$E_{m \times m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

5) Две матрицы одной размерности равны друг другу, если равны все элементы этих матриц, стоящие на одинаковых местах, т.е. если

$$A_{m \times n} = \{a_{ij}\}_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}, \quad B_{m \times n} = \{b_{ij}\}_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}},$$

$$A_{m \times n} = B_{m \times n}, \text{ где } a_{ij} = b_{ij}$$

6) Произведением матрицы $A_{m \times n} = \{a_{ij}\}_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$ на число α называется матрица $C_{m \times n}$, каждый элемент которой равен произведению соответствующего элемента матрицы

$A_{m \times n}$ на число α .

$$\alpha \cdot A_{m \times n} = C_{m \times n} \{a_{ij}\}, \text{ если } c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij} \text{ для всех } i=1..m, j=1..n$$

7) Суммой двух матриц одной размерности

$$A_{m \times n} = \{a_{ij}\}_{i=1..m, j=1..n}, \quad B_{m \times n} = \{b_{ij}\}_{i=1..m, j=1..n}, \text{ называется матрица } C_{m \times n} \text{ той же}$$

размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц $A_{m \times n}$ и $B_{m \times n}$, т.е.

$$A_{m \times n} + B_{m \times n} = C_{m \times n}, \text{ где}$$

8) Умножение матрицы на матрицу

Пусть даны две матрицы $A_{m \times n}$ и $B_{n \times k}$, таких что число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B . Тогда произведением матриц $A_{m \times n}$ и $B_{n \times k}$ называется матрица $C_{m \times k}$, каждый элемент которой C_{ij} равен сумме попарных произведений элементов i -той строки матрицы A на соответствующие элементы j -того столбца матрицы B , т.е.

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{in}b_{nj} \text{ для всех } i = 1 \text{ до } m \text{ и } j = 1 \text{ до } k. \text{ Заметим, что } A \cdot B \neq B \cdot A$$

9) Определители квадратных матриц

Каждой квадратной матрице ставится в соответствие число, обозначаемое

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Рассмотрим определители для матриц первого, второго и третьего порядков:

$$\text{а) Пусть } A = (a_{11}), \text{ тогда } \Delta_A = |a_{11}| = a_{11} \quad (1)$$

Из формулы (1) следует, что определитель для матрицы первого порядка совпадает с элементом матрицы $A_{1,1}$

$$\text{б) Пусть } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \text{ тогда } \Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \quad (2)$$

Из формулы (2) следует, что определитель для матрицы второго порядка равен разности произведений элементов матрицы, стоящих на главной и побочной диагоналях.

$$\text{в.) Пусть } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \text{ тогда}$$

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + \quad (3)$$

$$+ a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Формулу (3) запомнить значительно труднее, чем (1) и (2), но это и не требуется, так как существуют различные правила, позволяющие легко подсчитать те шесть слагаемых, из которых состоит определитель для матрицы третьего порядка.

Например, можно использовать «правило треугольников», которое условно показано на схемах 1 и 2.



схема 1



схема 2

Первые три слагаемые, входящие в формулу (3) со своим знаком, подсчитываются в соответствии со схемой 1, а следующие три слагаемые, входящие с противоположным знаком, подсчитываются по схеме 2.

10) Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} квадратной матрицы $A_{m \times m}$ называется число A_{ij} , вычисляемое по формуле:

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, где M_{ij} - определитель полученный из определителя матрицы $A_{m \times m}$ удалением строки с номером i и столбца с номером j .

11) Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется обратной к матрице A , если

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E - единичная матрица. Из определения следует, что матрицы A и A^{-1} - квадратные матрицы одного порядка. Квадратная матрица имеет обратную, если ее определитель

отличен от нуля и $A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1m} & A_{2m} & \dots & A_{mm} \end{pmatrix}$, где A_{ij} - алгебраические дополнения элемента a_{ij}

матрицы $A_{m \times m}$.

12) Решение простейших алгебраических уравнений

а) $A \cdot X = B$, где A и B - заданные матрицы, причем A - квадратная матрица, определитель которой $\neq 0$. Тогда $X = A^{-1} \cdot B$.

б) $X \cdot A = B$, где A и B - заданные матрицы, причем A - квадратная матрица, определитель которой $\neq 0$. Тогда $X = B \cdot A^{-1}$

Пример. Выполнить действия: $(A + 2B) \cdot C$, где

$$A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Решение: } 2B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}, \quad (\text{по п. 6})$$

$$A + 2B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} \quad (\text{по п. 7})$$

$$\begin{aligned} (A + 2B) \cdot C &= \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 10 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 7 \cdot 5 + (-3) \cdot 1 & 7 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 & 7 \cdot 7 + (-3) \cdot (-1) \\ 10 \cdot 5 + 7 \cdot 1 & 10 \cdot 3 + 7 \cdot 2 & 10 \cdot 7 + 7 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 32 & 15 & 52 \\ 57 & 44 & 63 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Пример2. Найти A^{-1} , если $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

Решение:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -9 - 2 = -11 \neq 0 \Rightarrow \text{следовательно, существует } A^{-1} \text{ и}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot |-3| = -3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot |2| = -2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot |1| = -1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot |3| = 3$$

$$\text{тогда } A^{-1} = \frac{1}{-11} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{2}{11} & -\frac{3}{11} \end{pmatrix}$$

Проверим, верно ли нашли A^{-1} . Для этого умножим A на A^{-1} и убедимся, что получим единичную матрицу.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{2}{11} & -\frac{3}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{11} + \frac{2}{11} & \frac{3}{11} - \frac{3}{11} \\ \frac{6}{11} - \frac{6}{11} & \frac{2}{11} + \frac{9}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задания для лабораторной работы.

Решить матричные уравнения и сделать проверку.

1.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$
2.	$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3.	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
4.	$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

5.	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
6.	$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
7.	$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
8.	$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} + 2(2 \ 1 \ 4) = 4(3 \ -1 \ 1)$
9.	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
10.	$3 \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + (5 \ 1 \ -1) = 2(1 \ 3 \ 2)$
11.	$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
12.	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot X - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$
13.	$(-3 \ -1 \ -4) - X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2(1 \ -1 \ 0)$
14.	$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
15.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

16.	$(1 \ -1 \ 2) - 2X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 3(2 \ 1 \ 3)$
17.	$3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
18.	$4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$
19.	$2(4 \ 2 \ -1) - X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 3)$
20.	$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Лабораторная работа №2. Системы линейных алгебраических уравнений

Уметь (У1 УК-1.2) Владеть (В1 ОПК-2.3)

Рассмотрим решение типового задания.

Задание. Решить систему линейных алгебраических уравнений тремя способами:

- а) по формулам Крамера;
- б).матричным способом;
- в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

Решение: а) Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot (-1) - 1 \cdot (-2) \cdot (-1) - 1 \cdot 3 \cdot 2 - (-1) \cdot 2 \cdot 2 = -8 + 6 + 1 - 2 - 6 + 4 = -5.$$

Так как $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение. Найдём Δ_1 , заменяя первый столбец в определителе Δ столбцом свободных членов.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -16 + 12 + 1 - 4 - 6 + 8 = -5.$$

Аналогично находим Δ_2 и Δ_3 .

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 8 - 2 + 1 - 8 - 8 = -5.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -8 + 3 - 4 + 8 + 2 - 6 = -5.$$

Решение ищем по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-5}{-5} = 1.$$

б) Составим матрицу системы A , матрицу - столбец X из неизвестных и матрицу - столбец B из свободных членов системы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь данная система может быть записана в матричной форме:

$$A \cdot X = B.$$

Решением этого матричного уравнения является матрица

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Найдём обратную матрицу по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A , M_{ij} – минор – определитель, получаемый путем вычеркивания элементов строки и столбца на которых стоит элемент a_{ij} .

Определитель системы $\Delta = -5$. Найдём алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -7,$$

$$X = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & -5 & 4 \\ 0 & 5 & -5 \\ 1 & 5 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -8 - 5 + 8 \\ 0 + 5 - 10 \\ 4 + 5 - 14 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Отсюда видно, что}$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1.$$

б) Для того чтобы решить систему методом Гаусса, составим расширенную матрицу системы и приведём её к диагональному виду.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

Для удобства преобразований желательно, чтобы «ведущий» элемент матрицы a_{11} был равен. Поменяем местами первую и вторую строки.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Умножим первую строку на -2 и прибавим ко второй строке, а из третьей строки вычтем первую. Получим

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Переставим вторую и третью строки.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Умножим 2-ую строку на -7 и прибавим к 3-ой.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

проделанная операция называется *прямым ходом* схемы Гаусса. *Обратный ход* предполагает получение нулей выше главной диагонали.

Умножим вторую строку на 2, третью – на -2 и прибавим к первой строке. Получим

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ откуда следует, что } x_1 = 1, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1.$$

Задания для лабораторной работы.

Решить систему линейных алгебраических уравнений тремя способами:

- по формулам Крамера;
- матричным способом;
- методом Гаусса.

$$2.1 \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

$$2.2 \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$$

$$2.3 \begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 5. \end{cases}$$

$$2.4 \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

$$2.5 \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$$

$$2.6 \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 4x_1 - 3x_2 = x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

$$2.7 \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$$

$$2.8 \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$$

$$2.9 \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

$$2.10 \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$2.11 \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$2.12 \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

$$2.13 \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$$

$$2.14 \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$$

$$2.15 \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 21 \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -16 \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 41. \end{cases}$$

$$2.16. \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 3 \end{cases}$$

$$2.17 \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 15 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 20 \end{cases}$$

$$2.18. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -6 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$$

$$2.19 \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -10 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 6 \end{cases}$$

$$2.20. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

$$2.21. \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$$

$$2.22. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$$

$$2.23. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$2.24. \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$2.25. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

$$2.26. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$$

$$2.27. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = -3 \end{cases}$$

$$2.28. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 19 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 6 \end{cases}$$

$$2.29. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -3 \end{cases}$$

$$2.30. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

Лабораторная работа №3. Векторная алгебра

Уметь (У1 ОПК-2.2)

Рассмотрим решения типовых заданий.

Задание 1.0.

Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Найти: $|\vec{a}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$.

$$\vec{a} = 3i + 4j - k, \quad \vec{b} = \{0; -3; -1\}, \quad \vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}.$$

Решение: Длина вектора вычисляется по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 16 + 1} = \sqrt{26}.$$

$$\text{Найдём } \vec{a} - \vec{b} = (3 - 0)i + (4 + 3)j + (-1 - 1)k = 3i + 7j - 2k = \{3; 7; -2\}.$$

$$\text{Тогда } |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3^2 + 7^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 49 + 4} = \sqrt{62}.$$

Скалярное произведение двух векторов равно:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 3 \cdot 0 + 4 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-1) = -12 + 2 = -10$$

Векторное произведение двух векторов равно:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -4i + 0j - 9k - 0k - 3i + 3j = i + 3j - 9k$$

Найдём вектор $\vec{c}$:

$$\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b} = 2\{3; 4; -1\} - 3\{0; -3; -1\} = \{6; 8; -2\} - \{0; 9; -3\} = \{6 - 0; 8 - 9; -2 + 3\} = \{6; -1; 1\}$$

Смешанное произведение

двух векторов равно:

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -9 - 24 - 18 - 3 = -54.$$

Задание 2.0.

Найти множество векторов, ортогональных векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$.

$$\vec{a} = \{2; -3; -1\}, \quad \vec{b} = \{1; -5; 3\}.$$

Решение: За множество ортогональных векторов возьмём вектора коллинеарные вектору $\vec{c}$ численно равному векторному произведению векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -9i - j - 10k + 3k - 5i - 6j = -14i - 7j - 7k.$$

Так как координаты полученного вектора делятся на минус семь, получим множество векторов ортогональных векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ т.е. $\vec{v} = \lambda(2i + j + k) = \lambda(2; 1; 1)$.

Задания для лабораторной работы.

Задание 1. Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Найти: $|\vec{a}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \vec{b} \vec{c}$.

- 1.1 $\vec{a} = 3i + j - 2k$, $\vec{b} = \{2; -5; 1\}$, $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.
- 1.2 $\vec{a} = 3i + 3j - 2$, $\vec{b} = \{-2; -2; 0\}$, $\vec{c} = -2\vec{a} + \vec{b}$.
- 1.3 $\vec{a} = i - 2k$, $\vec{b} = \{4; 5; -1\}$, $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$.
- 1.4 $\vec{a} = -2i + 3j - 2k$, $\vec{b} = \{3; 0; -1\}$, $\vec{c} = 5\vec{a} - \vec{b}$.
- 1.5 $\vec{a} = 3i + 3j - 2k$, $\vec{b} = \{5; 0; 1\}$, $\vec{c} = \vec{a} + 3\vec{b}$.
- 1.6 $\vec{a} = 6i - 2j + k$, $\vec{b} = \{7; -3; 2\}$, $\vec{c} = 3\vec{a} + 5\vec{b}$.
- 1.7 $\vec{a} = i + j - 2k$, $\vec{b} = \{-2; 5; -1\}$, $\vec{c} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$.
- 1.8 $\vec{a} = -3i + j - 2k$, $\vec{b} = \{-2; 0; -3\}$, $\vec{c} = \vec{a} + 4\vec{b}$.
- 1.9 $\vec{a} = i + 5j - 4k$, $\vec{b} = \{6; -1; 1\}$, $\vec{c} = 2\vec{a} - 5\vec{b}$.
- 1.10 $\vec{a} = -4i + 2j - 2k$, $\vec{b} = \{5; -5; 1\}$, $\vec{c} = 4\vec{a} - \vec{b}$.
- 1.11 $\vec{a} = i - 3j + 2k$, $\vec{b} = \{-2; -1; 2\}$, $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$.
- 1.12 $\vec{a} = 3i + 2j - k$, $\vec{b} = \{-2; 5; -1\}$, $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$.
- 1.13 $\vec{a} = -i + 3j - 2k$, $\vec{b} = \{-2; 4; -1\}$, $\vec{c} = 2\vec{a} + 4\vec{b}$.
- 1.14 $\vec{a} = 2i - j - 2k$, $\vec{b} = \{-3; -1; 3\}$, $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$.
- 1.15 $\vec{a} = 2i + 2j - 2k$, $\vec{b} = \{-5; 2; 1\}$, $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.
- 1.16 $\vec{a} = 2i - j + 2k$, $\vec{b} = \{-5; -1; -2\}$, $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$.
- 1.17 $\vec{a} = i + 2j - 4k$, $\vec{b} = \{-2; -3; -2\}$, $\vec{c} = -\vec{a} - 2\vec{b}$.
- 1.18 $\vec{a} = -i + 3j - 4k$, $\vec{b} = \{-2; -4; -1\}$, $\vec{c} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$.
- 1.19 $\vec{a} = -3i - j + 2k$, $\vec{b} = \{0; -1; -4\}$, $\vec{c} = 2\vec{a} - 4\vec{b}$.
- 1.20 $\vec{a} = 2i + 2j + k$, $\vec{b} = \{-5; 2; -1\}$, $\vec{c} = -2\vec{a} - 3\vec{b}$.
- 1.21 $\vec{a} = -i - 3j + 2k$, $\vec{b} = \{-3; -1; 2\}$, $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$.
- 1.22 $\vec{a} = 3i - 2j - k$, $\vec{b} = \{-2; 7; -1\}$, $\vec{c} = 2\vec{a} - 2\vec{b}$.
- 1.23 $\vec{a} = -i + 2j - 2k$, $\vec{b} = \{-2; -3; -1\}$, $\vec{c} = 2\vec{a} + 4\vec{b}$.
- 1.24 $\vec{a} = 2i - 3j - 2k$, $\vec{b} = \{-2; -2; 5\}$, $\vec{c} = 2\vec{a} - 5\vec{b}$.
- 1.25 $\vec{a} = 2i + j - 2k$, $\vec{b} = \{-5; -2; 1\}$, $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.
- 1.26 $\vec{a} = -2i - j + 2k$, $\vec{b} = \{-2; -1; -2\}$, $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$.
- 1.27 $\vec{a} = 2i + 2j - 4k$, $\vec{b} = \{-4; -3; -2\}$, $\vec{c} = -\vec{a} - 2\vec{b}$.
- 1.28 $\vec{a} = -i + 3j - 4k$, $\vec{b} = \{-2; -2; -1\}$, $\vec{c} = \vec{a} + 2\vec{b}$.
- 1.29 $\vec{a} = 3i - j + 2k$, $\vec{b} = \{0; -1; -4\}$, $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$.
- 1.30 $\vec{a} = 5i + 2j + k$, $\vec{b} = \{-5; -1; -1\}$, $\vec{c} = -2\vec{a} - 3\vec{b}$.

Задание 2. Найти множество векторов, ортогональных векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$.

- | | | | |
|------|---|-------|--|
| 2.1. | $\vec{a} = \{1; -3; 2\}$, $\vec{b} = \{-4; 3; 0\}$ | 4.16. | $\vec{a} = \{-1; 5; 0\}$, $\vec{b} = \{-2; -3; 2\}$ |
| 2.2. | $\vec{a} = \{3; 3; -2\}$, $\vec{b} = \{1; -3; 2\}$ | 4.17. | $\vec{a} = \{0; 5; -1\}$, $\vec{b} = \{2; 3; -1\}$ |
| 2.3. | | 4.18. | |

- 2.4. $\bar{a} = \{2; 3; 2\}, \bar{b} = \{-4; 3; 0\}$ 2.19. $\bar{a} = \{2; -3; 2\}, \bar{b} = \{-3; 3; 3\}$
 $\bar{a} = \{-2; 1; 4\}, \bar{b} = \{-1; 3; 2\}$ 2.20. $\bar{a} = \{1; 4; 2\}, \bar{b} = \{-1; -3; 8\}$
2.5. $\bar{a} = \{1; -3; 2\}, \bar{b} = \{-2; 2; 2\}$ 2.21. $\bar{a} = \{1; -1; 5\}, \bar{b} = \{-2; 5; 0\}$
2.6. $\bar{a} = \{3; -1; 2\}, \bar{b} = \{2; 1; -2\}$ 2.22. $\bar{a} = \{1; -3; 0\}, \bar{b} = \{-1; 7; 0\}$
2.7. $\bar{a} = \{1; -3; -3\}, \bar{b} = \{4; 2; 2\}$ 2.23. $\bar{a} = \{0; 3; 1\}, \bar{b} = \{-2; -3; 4\}$
2.8. $\bar{a} = \{1; -5; 2\}, \bar{b} = \{-2; 1; 7\}$ 2.24. $\bar{a} = \{1; -5; 2\}, \bar{b} = \{-1; 2; 8\}$
2.9. $\bar{a} = \{1; -4; -2\}, \bar{b} = \{-1; 2; 0\}$ 2.25. $\bar{a} = \{1; -1; 0\}, \bar{b} = \{-1; 2; -2\}$
2.10. $\bar{a} = \{1; 4; 2\}, \bar{b} = \{-1; -3; 8\}$ 2.26. $\bar{a} = \{-1; -5; 3\}, \bar{b} = \{-1; -5; 8\}$
2.11. $\bar{a} = \{-3; -1; 0\}, \bar{b} = \{2; 1; -2\}$ 2.27. $\bar{a} = \{1; -5; -5\}, \bar{b} = \{-1; 2; 3\}$
2.12. $\bar{a} = \{1; -5; -3\}, \bar{b} = \{4; -2; -2\}$ 2.28. $\bar{a} = \{3; -1; 2\}, \bar{b} = \{2; 1; -2\}$
2.13. $\bar{a} = \{1; 4; -2\}, \bar{b} = \{-2; 1; 7\}$ 2.29. $\bar{a} = \{1; -3; -3\}, \bar{b} = \{4; 2; 2\}$
2.14. $\bar{a} = \{1; -4; -2\}, \bar{b} = \{-1; 6; 0\}$ 2.30. $\bar{a} = \{1; 5; 2\}, \bar{b} = \{-2; 1; 7\}$
2.15. $\bar{a} = \{1; -4; 2\}, \bar{b} = \{-1; -3; 6\}$ $\bar{a} = \{1; -4; -2\}, \bar{b} = \{-1; 2; 0\}$

Лабораторная работа №4 Линейные операторы

Уметь (У1 УК-1.2)

Число λ называется *собственным числом* квадратной матрицы A n -ого порядка, если существует такой ненулевой n -мерный вектор X , что $AX = \lambda X$.

Этот ненулевой вектор X называется *собственным вектором* матрицы A , соответствующим ее собственному числу λ .

Множество всех собственных чисел матрицы A совпадает с множеством всех решений уравнения $|A - \lambda E| = 0$, которое называется *характеристическим уравнением* матрицы A .

Множество всех собственных векторов матрицы A , соответствующих ее собственному числу λ , совпадает с множеством всех ненулевых решений системы однородных уравнений

$$(A - \lambda E)X = 0.$$

Задание. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы A .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение: Найдем характеристическое уравнение матрицы A – определитель матрицы $A - \lambda E$, где E – единичная матрица, λ – независимая переменная.

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} |A - \lambda E| &= \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 2\lambda - 3) = (1-\lambda) \cdot (\lambda+1) \cdot (\lambda-3) \end{aligned}$$

При вычислении данного определителя использовалось его разложение по элементам третьего столбца.

Найдем теперь собственные числа матрицы A – корни характеристического уравнения $(1-\lambda) \cdot (\lambda+1) \cdot (\lambda-3) = 0$. Получаем:

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1.$$

Далее найдем собственные векторы матрицы A , соответствующие каждому из собственных чисел.

Пусть

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \text{искомый собственный вектор.}$$

Тогда система однородных уравнений $(A - \lambda E) = 0$ выглядит так:

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 3 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} -\lambda x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 + (2-\lambda)x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Эта однородная система линейных уравнений имеет множество решений, так как ее определитель равен нулю.

При $\lambda = \lambda_1 = 3$ система (1) принимает вид:

$$\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Общее решение этой системы } X_0^{(1)} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ где } x_2 - \text{любое число.}$$

В качестве собственного вектора достаточно взять любое частное решение. Пусть, например,

$x_2 = 1$, тогда собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_1 = 3$, имеет вид

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda = \lambda_2 = 1$ система (1) принимает вид:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Общее решение этой системы $X_0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$, где x_3 — любое число.

Пусть, например, $x_3 = 1$, тогда собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_2 = 1$, имеет вид

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично при $\lambda = \lambda_3 = -1$ получаем систему

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases},$$

общее решение которой $X_0^{(3)} = \begin{pmatrix} -3x_2 \\ x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$, где x_2 — любое число.

Пусть $x_2 = 1$, тогда собственный вектор, соответствующий собственному числу $\lambda_3 = -1$, имеет вид

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$,

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, X^{(3)} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Задания для лабораторной работы.

Найти собственные числа и собственные векторы матрицы .

1.	$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	2.	$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
3.	$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	4.	$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
5.	$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	6.	$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
7.	$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$	8.	$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & 7 & -3 \end{pmatrix}$
9.	$A = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	10.	$A = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 4 \end{pmatrix}$
11.	$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	12.	$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$
13.	$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	14.	$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -2 \\ 5 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
15.	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	16.	$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
17.	$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$	18.	$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

19.	$A = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	20.	$A = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
-----	--	-----	---

Лабораторные работы №5 и №6. Аналитическая геометрия на плоскости.

Владеть (В1 УК-1.3)

Для решения задачи (прямая линия на плоскости) следует использовать следующие сведения:

1). Угол наклона прямой к оси OX - это угол, на который нужно повернуть ось OX , чтобы она совпала с данной прямой (или оказалась параллельной ей). Как обычно, угол положителен, если поворачиваем против часовой стрелки, и отрицателен, если поворачиваем по часовой стрелке. Будем обозначать его буквой φ .

2). Угловой коэффициент прямой - это тангенс угла наклона прямой к оси OX . Будем обозначать его буквой k . Следовательно,

$$k = \operatorname{tg} \varphi. \quad (1)$$

3). Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Если прямая не параллельна оси OY (рис.1), то ее уравнение

$$y = kx + b, \quad (2)$$

где b - ордината точки пересечения прямой с осью OY , k - угловой коэффициент прямой, (x, y) - координаты любой точки на прямой. Если прямая параллельна оси OY (рис.2), то ее уравнение

$$x = a, \quad (3)$$

где a - абсцисса точки пересечения прямой с осью OX .

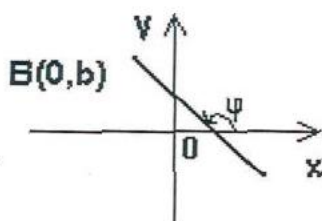


РИС.1

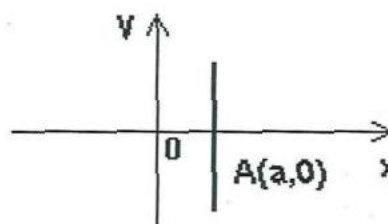


РИС.2

4). Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющей угловой коэффициент k ,
 $y - y_0 = k(x - x_0), \quad (4)$

где (x_0, y_0) - координаты заданной точки на прямой, k - угловой коэффициент прямой, (x, y) - координаты любой точки на прямой.

5). Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad (5)$$

где (x_1, y_1) - координаты одной точки на прямой, (x_2, y_2) - координаты другой точки на прямой, (x, y) - координаты любой точки на прямой.

6). Общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0, \quad (6)$$

где A, B, C - заданные числа, причем A и B одновременно в нуль не обращаются, (x, y) - координаты любой точки на прямой.

Если B не обращается в нуль, то уравнение (6) можно преобразовать следующим образом:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}. \quad (6')$$

Тогда, сопоставив формулы (6') и (2), имеем :

$$k = -\frac{A}{B}$$

7). Условие параллельности двух прямых

$$k_1 = k_2, \quad (7)$$

где k_1 и k_2 - угловые коэффициенты прямых.

8). Условие перпендикулярности двух прямых

$$k_1 \cdot k_2 = -1, \quad (8)$$

где k_1 и k_2 - угловые коэффициенты прямых.

9). Нахождение координат точки пересечения двух прямых

Если две непараллельные прямые заданы своими уравнениями :

$$A_1 X + B_1 Y + C_1 = 0 \text{ и } A_2 X + B_2 Y + C_2 = 0,$$

то координаты точки пересечения этих прямых - есть решение системы уравнений :

$$\begin{cases} A_1 X + B_1 Y + C_1 = 0 \\ A_2 X + B_2 Y + C_2 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

10.) Нахождение угла между прямыми:

$$\cos \varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad \angle \varphi = \arccos \cos \varphi \quad (10.a)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1}{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}, \quad \angle \varphi = \operatorname{arctg} \operatorname{tg} \varphi \quad (10.b.)$$

если $A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0$, то формула понимается условно ($\varphi = \frac{\pi}{2}$),

φ - угол на который надо повернуть первую прямую, чтобы она стала параллельна второй.

11). Нахождение координат середины отрезка

Если точка A имеет координаты (x_a, y_a) , а точка $B - (x_b, y_b)$, то координаты середины O отрезка AB можно найти по формулам :

$$x_0 = \frac{x_a + x_b}{2}, y_0 = \frac{y_a + y_b}{2} \quad (11)$$

12). Нахождение длины отрезка

Если точка A имеет координаты (x_a, y_a) , а точка $B - (x_b, y_b)$, то длину отрезка AB можно найти по формуле :

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}. \quad (12)$$

13). Деление отрезка в данном отношении

Если точка A имеет координаты (x_a, y_a) , а точка $B - (x_b, y_b)$, то координаты точки C делящей отрезок AB в отношении $m : n$ можно найти по формулам :

$$x_c = \frac{x_a n + x_b m}{n + m}, y_c = \frac{y_a n + y_b m}{n + m} \quad (13)$$

14.) Площадь треугольника. Пусть точки $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$ - вершины треугольника, тогда его площадь выражается формулой:

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{2} [(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)] \quad (14.)$$

Знак перед определителем выбирается так, чтобы площадь была положительной.

Рассмотрим несколько заданий применения приведенных формул.

Задание. Точки $A(2,1)$, $B(1,-2)$, $C(-1,0)$ являются вершинами треугольника ABC .

а) Найти уравнения сторон треугольника ABC

Решение. Первая прямая проходит через две точки $A(2,1)$, $B(1,-2)$, поэтому ее уравнение будем искать в виде (5): $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Подставляя $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $y_1 = 1$, $y_2 = -2$, получим :

$$\frac{x-2}{1-2} = \frac{y-1}{-2-1} \Rightarrow \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-3} \Rightarrow -3(x-2) = -1(y-1) \Rightarrow 3x - y - 5 = 0$$

Вторая прямая проходит через две точки $B(1,-2)$, $C(-1,0)$ поэтому ее уравнение будем искать в виде (5): $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Подставляя $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $y_1 = -2$, $y_2 = 0$, получим :

$$\frac{x-1}{-1-1} = \frac{y-(-2)}{0-(-2)} \Rightarrow \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{2} \Rightarrow 2(x-1) = -2(y+2) \Rightarrow 2x + 2y + 2 = 0, \text{ разделим на } 2$$

получим $x + y + 1 = 0$.

Третья прямая проходит через две точки $A(2,1)$, $C(-1,0)$ поэтому ее уравнение будем искать в виде (5): $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Подставляя $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, получим :

$$\frac{x-2}{-1-2} = \frac{y-1}{0-1} \Rightarrow \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{-1} \Rightarrow -1(x-2) = -3(y-1) \Rightarrow x - 3y + 1 = 0$$

б) Найти уравнение одной из медиан треугольника ABC .

Решение. Обозначим середину стороны BC буквой M . Тогда координаты точки M найдем по формулам деления отрезка пополам.

$B(1;-2)$, $C(-1;0)$

$$x_m = \frac{x_b + x_c}{2} = \frac{1-1}{2} = 0, y_m = \frac{y_b + y_c}{2} = \frac{-2+0}{2} = -1 \Rightarrow M(0;-1).$$

Уравнение медианы AM найдем, используя формулу для уравнения прямой, проходящей через две заданные точки. Медиана AM проходит через точки $A(2;1)$ и $M(0;-1)$, поэтому:

$$\frac{x-x_a}{x_m-x_a} = \frac{y-y_a}{y_m-y_a}; \frac{x-2}{0-2} = \frac{y-1}{-1-1} \Rightarrow -2(y-1) = -2(x-2) \Rightarrow x - y - 1 = 0.$$

в) Найти уравнение одной из высот треугольника ABC .

Решение. Найдем уравнение высоты CZ , проходящей через точку $C(-1;0)$ и точку Z , лежащую на стороне AB : $3x-y-5=0$. Для этого найдем угловой коэффициент k_1 прямой AB . Для этого представим уравнение

$$3x-y-5=0 \text{ в виде (2): } y = k_1 x + b.$$

$$y = 3x - 5 = k_1 x + b, \text{ т.е. } k_1 = 3.$$

Найдем угловой коэффициент k перпендикуляра из условия перпендикулярности двух прямых (8): $k_1 \cdot k = -1$.

Подставляя вместо k_1 угловой коэффициент данной прямой, получим :

$$3k = -1 \Rightarrow k = -\frac{1}{3}.$$

Так как перпендикуляр проходит через точку $C(-1;0)$ и имеет

$k = -\frac{1}{3}$, то будем искать его уравнение в виде (4):

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Подставляя

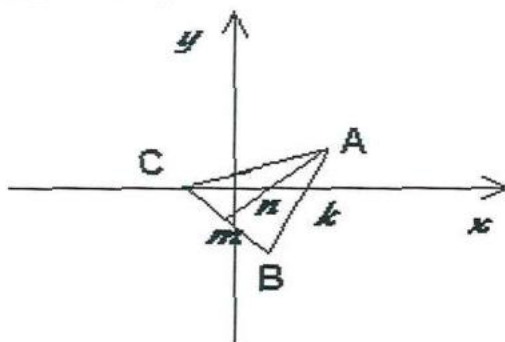
$$x_0 = -1, k = -\frac{1}{3}, y_0 = 0 \text{ получим:}$$

$$y - 0 = -\frac{1}{3}(x - (-1)) \Rightarrow x + 3y + 1 = 0.$$

уравнение высоты CZ.

г) Найти уравнение одной из биссектрис треугольника ABC.

Решение. Найдем биссектрису угла BAC. Точку пересечения биссектрисы со стороной CB обозначим M.



Воспользуемся формулой (10.6) $AB: 3x - y - 5 = 0, AC: x - 3y - 1 = 0$

$$\operatorname{tg}(\angle BAC) = \frac{A_1 \cdot B_2 - A_2 \cdot B_1}{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2} = \frac{3 \cdot (-3) - 1 \cdot (-1)}{3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-3)} = \frac{-4}{3}, \angle BAC \approx 53^\circ$$

Углы вычисляем на калькуляторе, либо по таблицам. Биссектриса делит угол пополам, следовательно

$\angle NAK \approx 26,5^\circ$. Тангенс угла наклона AB равен 3 (т.к. $y = 3x - 5$). Угол наклона равен 71° .

$\angle NKA \approx 180^\circ - 71^\circ = 109^\circ$. $\angle ANK \approx 180^\circ - (109^\circ + 26,5^\circ) = 44,5^\circ \approx 45^\circ$. ($\operatorname{tg} 45^\circ = 1$).

Биссектриса проходит через точку A (2, 1), используя формулу (4), имеем:

$$y - y_0 = k(x - x_0); y - 1 = 1(x - 2), \text{ уравнение биссектрисы } y = x - 1$$

д.) Найти площадь треугольника ABC.

Точки A (2, 1), B (1, -2), C (-1, 0) являются вершинами треугольника ABC. Воспользуемся формулой (14).

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_a - x_c & y_a - y_c \\ x_b - x_c & y_b - y_c \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 - (-1) & 1 - 0 \\ 1 - (-1) & (-2) - 0 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{2} (3(-2) - 2 \cdot 1) = 4$$

Задания для лабораторной работы.

Даны координаты точек A, B, C. Найти уравнения сторон треугольника ABC. Найти уравнение одной из медиан треугольника ABC. Найти уравнение одной из высот треугольника ABC. Найти уравнение одной из биссектрис треугольника ABC. Найти площадь треугольника ABC.

	A	B	C		A	B	C
2.1	(1;2)	(2;0)	(-1;1)	2.11	(1;3)	(3;0)	(-1;1)
2.2	(2;1)	(1;0)	(-1;2)	2.12	(3;1)	(1;0)	(-1;3)
2.3	(2;0)	(1;1)	(-1;2)	2.13	(3;0)	(1;1)	(-1;3)
2.4	(2;1)	(1;0)	(1;-1)	2.14	(3;-1)	(1;0)	(1;1)
2.5	(-1;0)	(2;1)	(1;-1)	2.15	(-1;0)	(3;1)	(1;-1)
2.6	(1;-1)	(-1;0)	(2;1)	2.16	(1;-1)	(-1;0)	(3;1)

2.7	(1;-2)	(0;1)	(2;-1)	2.17	(1;-3)	(0;1)	(3;-1)
2.8	(2;-1)	(1;-2)	(0;1)	2.18	(3;-1)	(1;-3)	(0;1)
2.9	(-2;1)	(-1;-2)	(1;2)	2.19	(-3;1)	(-1;-3)	(1;3)
2.10	(2;2)	(-2;1)	(1;1)	2.20	(-3;3)	(3;1)	(1;1)

Лабораторные работы №7 и №8. Аналитическая геометрия в пространстве.

Владеть (В1 УК-1.3)

Для решения заданий следует использовать следующие сведения.

1.) Канонические уравнения прямой

$$L: \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \quad (1)$$

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ - любая точка на прямой L .

l, m, n - проекции направляющего вектора прямой L на оси Ox, Oy, Oz соответственно. Хотя бы одно из чисел l, m, n отлично от нуля.

2.) Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (2)$$

где (x_1, y_1, z_1) - координаты одной точки на прямой, (x_2, y_2, z_2) - координаты другой точки на прямой, (x, y, z) - координаты любой точки на прямой.

3.) Параметрические уравнения прямой

$$x = x_0 + lt, y = y_0 + mt, z = z_0 + nt \quad (3)$$

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ - любая точка на прямой, l, m, n - проекции направляющего вектора прямой, t - параметр, изменяя который можно получить все точки прямой.

4.) Условие параллельности прямых

Рассмотрим две прямые

$$L_1: \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

$$L_2: \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}, \text{ если прямая } L_1 \text{ параллельна } L_2, \text{ то выполняется условие :}$$

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad (4)$$

5.) Условие перпендикулярности прямых

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \quad (5)$$

6.) Общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (6)$$

где A, B, C, D - координаты вектора нормали, причем хотя бы одно из чисел A, B, C отлично от нуля, $(x; y; z)$ - координаты любой точки на плоскости. Геометрический смысл коэффициентов A, B, C в уравнении (1) - это проекции вектора, перпендикулярного плоскости.

7.) Уравнение плоскости, проходящей через три точки

$M_0(x_0, y_0, z_0), M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (7) \text{ или}$$

$$(x - x_0)((y_1 - y_0)(z_2 - z_0) - (y_2 - y_0)(z_1 - z_0)) - (y - y_0)((x_1 - x_0)(z_2 - z_0) - (x_2 - x_0)(z_1 - z_0)) +$$

$$+(z-z_0)((x_1-x_0)(y_2-y_0)-(x_2-x_0)(y_1-y_0))=0$$

8). Условие параллельности плоскостей

Рассмотрим две плоскости

$$P_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

$P_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, если плоскость P_1 параллельна P_2 , то выполняется условие :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad (8)$$

9.) Условие перпендикулярности плоскостей

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0 \quad (9)$$

10.а) угол между плоскостями

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ и } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

$$\cos \varphi = \pm \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (10.a)$$

$$\angle \varphi = \arccos \cos \varphi$$

10.б) угол между векторами

$$\overline{a_1} = \{X_1, Y_1, Z_1\} \text{ и } \overline{a_2} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$$

$$\cos \varphi = \frac{X_1 \cdot X_2 + Y_1 \cdot Y_2 + Z_1 \cdot Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \cdot \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}} \quad (10.б)$$

$$\angle \varphi = \arccos \cos \varphi$$

10.в) угол между прямой и плоскостью

прямая L с направляющими коэффициентами (l, m, n) и плоскость $Ax+By+Cz+D=0$

$$\sin \varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} \quad (10.в)$$

11.) Расстояние между двумя точками

Даны точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$, расстояние между ними:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (11)$$

12.) Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости

$Ax+By+Cz+D=0$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad (12)$$

13.) Выражение векторного произведения через координаты сомножителей , если

$$\overline{a_1} = \{X_1, Y_1, Z_1\}, \overline{a_2} = \{X_2, Y_2, Z_2\}, \text{ то}$$

$$\overline{a_1} \times \overline{a_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \quad (13)$$

Первая строка определителя состоит из координатных ортов, вторая из проекций первого сомножителя, третья из проекций второго сомножителя.

14.) Объем параллелепипеда, построенного на векторах

$$\overline{a_1} = \{X_1, Y_1, Z_1\}, \overline{a_2} = \{X_2, Y_2, Z_2\}, \overline{a_3} = \{X_3, Y_3, Z_3\}$$

$$V = \pm \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} \quad (14)$$

знак выбирается таким образом, чтобы объем был положительный.

Рассмотрим несколько заданий применения приведенных формул.

Задание. Даны точки $A_1 (1, -1, -2)$, $A_2 (2, 1, 0)$, $A_3 (-1, 0, 2)$, $A_4 (0, 1, 1)$.

а) Найти длину ребра $A_1 A_2$.

Воспользуемся формулой (11). Расстояние между двумя точками.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} =$$

$$= \sqrt{(2 - 1)^2 + (1 - (-1))^2 + (0 - (-2))^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$$

Длина ребра $A_1 A_2$ равна 3.

б) Составить уравнение ребра $A_1 A_4$ и грани $A_1 A_2 A_3$.

Составим уравнение прямой проходящей через точки

$A_1 (1, -1, -2)$ и $A_4 (0, 1, 1)$, воспользуемся формулой (2)

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

$$\frac{x - 1}{0 - 1} = \frac{y - (-1)}{1 - (-1)} = \frac{z - (-2)}{1 - (-2)}; \quad \frac{x - 1}{-1} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z + 2}{3}$$

Найдем уравнение плоскости, проходящей через точки

$A_1 (1, -1, -2)$, $A_2 (2, 1, 0)$, $A_3 (-1, 0, 2)$,

Воспользуемся формулой (7)

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - (-1) & z - (-2) \\ 2 - 1 & 1 - (-1) & 0 - (-2) \\ -1 - 1 & 0 - (-1) & 2 - (-2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - 1 & y + 1 & z + 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (x - 1)(2 \cdot 4 - 2 \cdot 1) - (y + 1)(1 \cdot 4 - 2 \cdot (-2)) + (z + 2)(1 \cdot 1 - 2 \cdot (-2)) =$$

$$(x - 1)6 - (y + 1)8 + (z + 2)5 = 6x - 8y + 5z - 4$$

уравнение грани $6x - 8y + 5z - 4 = 0$, ребра $\frac{x - 1}{-1} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z + 2}{3}$

в) Составить уравнение высоты опущенной из точки

$A_4 (0, 1, 1)$ на плоскость $A_1 A_2 A_3$.

Высота проходит через точку $A_4 (0, 1, 1)$ и перпендикулярна плоскости $6x - 8y + 5z - 4 = 0$, имеющей вектор нормали $\{6, -8, 5\}$.

Направляющий вектор высоты совпадает с вектором нормали данной плоскости, следовательно т.к.

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} \quad (2), \quad \text{то} \quad \frac{x - 0}{6} = \frac{y - 1}{-8} = \frac{z - 1}{5} \quad \text{уравнение искомой высоты.}$$

или в параметрической форме (3)

$$x = x_0 + lt, y = y_0 + mt, z = z_0 + nt$$

$$x=6t, y=1-8t, z=1+5t$$

г.) Найти площадь треугольника $A_1A_2A_3$ с вершинами

$A_1 (1, -1, -2), A_2 (2, 1, 0), A_3 (-1, 0, 2)$,

Площадь треугольника будет равна $1/2$ площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{A_1A_2} = \{1, 2, 2\}$ и $\overrightarrow{A_1A_3} = \{-2, 1, 4\}$. Площадь параллелограмма равна модулю векторного произведения этих векторов. Воспользуемся формулой (13)

$$\overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{a_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 6; \quad \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 2 \cdot (-2) = 8$$

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-2) \cdot 2 = 5, \quad \overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3} = 6\vec{i} - 8\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}| = \frac{1}{2} \sqrt{6^2 + (-8)^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}$$

д) Найти объем треугольной пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ с вершинами

$A_1 (1, -1, -2), A_2 (2, 1, 0), A_3 (-1, 0, 2), A_4 (0, 1, 1)$.

Искомый объем равен $1/6$ объема параллелепипеда, построенного на ребрах A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 . Воспользуемся формулой (14)

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \{1, 2, 2\}, \overrightarrow{A_1A_3} = \{-2, 1, 4\}, \overrightarrow{A_1A_4} = \{-1, 2, 3\}$$

$$V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \pm \frac{1}{6} (1 \cdot 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \cdot 2 - (-1) \cdot 1 \cdot 2 - (-2) \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 4) = \frac{7}{6}$$

Задания для лабораторной работы.

Даны координаты точек A_1, A_2, A_3, A_4

Найти длину ребра A_1A_2 . Составить уравнение ребра A_1A_4 и грани $A_1A_2A_3$. Составить уравнение высоты опущенной из точки A_4 на плоскость $A_1A_2A_3$. Найти площадь треугольника $A_1A_2A_3$. Найти объем треугольной пирамиды $A_1A_2A_3A_4$

	Координаты точек			
	A_1	A_2	A_3	A_4
1.	(1;0;2)	(2;1;1)	(-1;2;0)	(-2;-1;-1)
2.	(-1;2;1)	(1;0;2)	(2;-1;3)	(1;1;0)
3.	(2;1;1)	(-1;2;-1)	(1;0;-2)	(3;-1;2)
4.	(-1;2;0)	(1;0;-2)	(3;1;1)	(2;-1;-1)
5.	(2;0;1)	(1;3;-1)	(-1;2;0)	(2;-2;1)
6.	(1;2;-3)	(2;1;1)	(3;0;2)	(0;-1;3)
7.	(1;-2;3)	(3;1;2)	(-1;0;-3)	(2;-1;1)
8.	(2;0;3)	(-1;3;2)	(3;2;0)	(-2;1;1)
9.	(-2;1;-3)	(3;-1;0)	(2;3;1)	(1;2;2)
10.	(2;2;1)	(1;1;3)	(-2;0;-1)	(0;-1;2)
11.	(1;2;5)	(0;7;2)	(0;2;7)	(1;5;0)
12.	(4;4;10)	(4;10;2)	(2;8;4)	(9;6;4)

13.	(4;6;5)	(6;9;4)	(2;10;10)	(7;5;9)
14.	(3;5;4)	(8;7;4)	(5;10;4)	(4;7;8)
15.	(10;6;6)	(-2;8;2)	(6;8;9)	(7;10;3)
16.	(1;8;2)	(5;2;6)	(5;7;4)	(4;10;9)
17.	(6;6;5)	(4;9;5)	(4;6;11)	(6;9;3)
18.	(7;2;2)	(5;7;7)	(5;3;1)	(2;3;7)
19.	(8;6;4)	(10;5;5)	(5;6;8)	(8;10;7)
20.	(7;7;3)	(6;5;8)	(3;5;8)	(8;4;1)

Лист внесения дополнений и изменений
в рабочую программу учебной дисциплины
«Линейная алгебра»
(наименование дисциплины)
на 2026 - 2027 учебный год

Рабочая программа пересмотрена на заседании кафедры «Системы автоматизированного проектирования и моделирования»,

протокол № 8 от 17.04 2026 г.

и.о. зав. кафедрой,
доцент, канд. пед. наук
ученая степень, ученое звание


подпись

/В.В. Соболева/
И.О. Фамилия

В рабочую программу вносятся следующие изменения:

1. П8.1 представлен в следующий редакции:

8.1 Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины:

б) дополнительная учебная литература

9. Туганбаев, А. А. Линейная алгебра : учебное пособие : [16+] / А. А. Туганбаев. – 3-е изд., стер. – Москва : ФЛИНТА, 2024. – 75 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=115141>. – ISBN 978-5-9765-1407-2. – Текст : электронный.

10. Жуковская, Т. В. Элементарная математика. Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия : решебник олимпиадных задач по математике для втузов : учебное пособие : [16+] / Т. В. Жуковская, Е. А. Молоканова, А. Н. Пчелинцев. – Москва ; Вологда : Инфра-Инженерия, 2025. – 240 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: <https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=727124>. – Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-9729-2544-5. – Текст : электронный.

Составители изменений и дополнений:

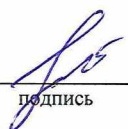
ст. преподаватель
ученая степень, ученое звание


подпись

/И.А. Череповская/
И.О. Фамилия

Председатель МКН по направлению 38.03.01 «Экономика» направленность (профиль) «Бухгалтерский учет, анализ и аудит», направленность (профиль) «Ценообразование и сметное дело в строительстве»

к.э.н., доцент
ученая степень, ученое звание
«17» апреля 2026 г.


подпись

/И.А. Митченко/
И.О. Фамилия