Фундаментальные научные основы проектирования и перспективы развития технологий возведения зданий и сооружений

УДК 624.1

ВОЗДЕЙСТВИЕ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ПОДВИЖНОГО СОСТАВА НА ВЕРХНЕЕ СТРОЕНИЕ ПУТИ И КОНСТРУКЦИИ ОБДЕЛОК ТОННЕЛЕЙ ИЗ ОПУСКНЫХ СЕКЦИЙ

И. И. Зернов, Е. А. Пестрякова, С. С. Харитонов
Российский университет транспорта (МИИТ)
(г. Москва)

Введение

С момента ввода в эксплуатацию первой в мире высокоскоростной магистрали (ВСМ) в Японии в 1964 г., развитие высокоскоростного движения идет все более высокими темпами [1]. Наличие высокоскоростного железнодорожного транспорта стало одним из показателей уровня технического развития стран, в связи с чем развитие скоростного и высокоскоростного движения является одним из стратегических приоритетов России, что отражено в «Стратегии развития железнодорожного транспорта в Российской Федерации до 2030 года» [2].

В связи с вышесказанным, изучение напряженно-деформированного состояния верхнего строения пути и искусственных сооружений при действии нагрузок, определяемых движением высокоскоростного подвижного состава и оптимизация расчетов в данной области, являются актуальными задачами.

В Российском университете железнодорожного транспорта (МИИТ), проблемам, связанным с высокоскоростным движение поездов, уделяется большое внимание. Так, в 2015 г. в МИИТе под руководством Е. Н. Курбацкого была успешно защищена диссертация «Воздействие высокоскоростных подвижных нагрузок на балки, плиты и полупространство» Нгуен Чонг Тама [3], в которой рассмотрены эффекты существенного возрастания вибраций, генерируемых рельсовым транспортом, и прогибов в конструкции пути, возникающие при движении поездов со скоростями, близкими к скоростям распространения волн Релея в грунтах основания ж/д пути, скоростям волн в плитах основания (критические скорости), и минимальным фазовым скоростям распространения изгибных волн в конструкции верхнего строения пути (критическая скорость верхнего строения пути) [4–6].

В прошлые годы, эффектам, возникающем при движении поездов с рассматриваемыми типами критических скоростей уделялось недостаточно внимания, так как считалось, что достижение таких скоростей на практике вряд ли возможно [7]. Однако, выполненные в последнее время теоретические исследования и натурные испытания показали, что достижение и превышение критических скоростей на современном уровне развития техники возможно, при условии размещения пути на участке с мягкими грунтами [8, 9, 14, 15].

Таким образом, необходимо представить эффективный метод определения напряженно-деформированного состояния верхнего строения пути и искусственных сооружении инфраструктуры железнодорожного транспорта при движении состава с высокими скоростями.

Теоретическое исследование, приведенное в данной статье, предназначено для определения воздействия подвижного состава на верхнее строение пути с целью приложения данного воздействия к конструкциям тоннелей из опускных секций.

Расчетная модель и метод решения

В настоящей работе тоннель будет рассматриваться как балка на упруго вязком основании, в связи с чем оцениваться будет фазовая скорость распространения изгибных волн в тоннельной обделке.

Для оценки взаимодействия высокоскоростных поездов с конструкцией обделки тоннеля воспользуемся моделью балки Эйлера-Бернулли на упругом основании (рис. 1) [10]. При необходимости для уточнения расчетных моделей можно использовать и другие модели балок: модели Рэлея и Тимошенко.

$$EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + Ku + C\frac{\partial u}{\partial t} + \rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = q(x,t) \qquad (1)$$

где: u – прогиб балки, x – координата направления движения подвижной нагрузки, t – время, EI – жесткость балки, E – модуль Юнга, I – момент инерции балки, K – коэффициент постели основания, C – коэффициент вязкого демпфирования основания, ρ – плотность, A – площадь сечения.

Для получения решения на подвижную нагрузку определяется функция Грина уравнения (1). Функции Грина позволяют получить решение линейных уравнений в частных производных в замкнутой форме в виде интеграла [11]. Для этой цели определяется решение дифференциальных уравнений от точечных источников. Функция Грина $G(x,t)$ определяет перемещение балки от мгновенного точечного воздействия, которое представляется в виде произведения дельта функций Дирака:

$$q_\delta(x,t) = \delta(x - x_0)\delta(t - t_0) \qquad (2)$$

Для получения функции Грина используются обобщенные функции и преобразование Фурье.

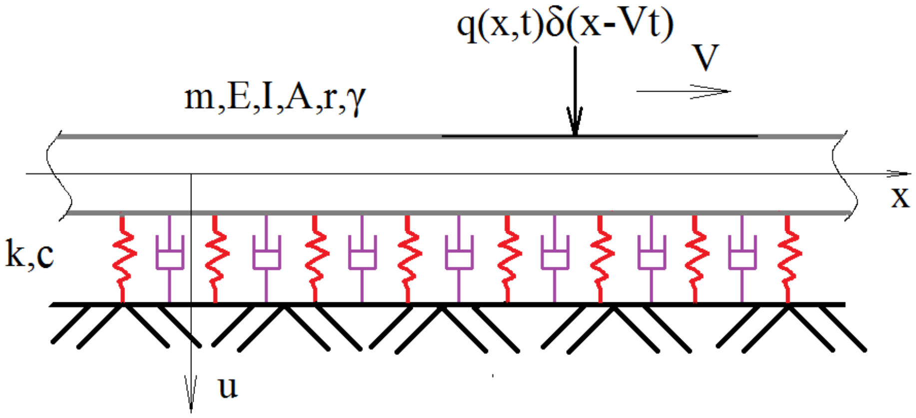

Рис. 1. Расчетная схема

Ввиду того, что преобразование Фурье может определяться различными способами [12], представим формулы прямого и обратного преобразования, которые будут использоваться в статье:

$$\begin{aligned} &\tilde{\tilde{f}}(\nu,\omega)=F\left[f(x,t)\right]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,t)e^{i\nu x}e^{i\omega t}dxdt \\ &f(x,t)=F^{-1}\left[\tilde{\tilde{f}}(\nu,\omega)\right]=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{\tilde{f}}(\nu,\omega)e^{-i\nu x}e^{-i\omega t}d\nu d\omega \end{aligned} \tag{3}$$

$\tilde{\tilde{f}}(\nu,\omega)$ – изображение Фурье функции $f(x,t)$; ω и ν – параметры преобразования Фурье частота и волновое число.

Кроме того, представим соответствие операции при преобразовании дифференциальных уравнений в область изображений:

$$\begin{aligned} &F\left[f^n(t)\right]=(-i\omega)^n\tilde{f}(\omega) \\ &F\left[f^n(x)\right]=(-i\nu)^n\tilde{f}(\nu) \end{aligned} \tag{4}$$

Отметим так же свойства дельта функций, которые будут использоваться при выводе функции Грина [13]:

$$\begin{aligned} &\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\delta(x-x_0)dx=f(x_0) \\ &\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,t)\delta(x-x_0)\delta(t-t_0)dxdt=f(x_0,t_0) \\ &\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i(\omega+a)t}dt=2\pi\delta(\omega+a) \end{aligned} \tag{5}$$

Используя свойство дельта функций Дирака, запишем преобразование Фурье точечного мгновенного воздействия

$$\tilde{q}_\delta(\nu,\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(x-x_0)\delta(t-t_0)e^{i\nu x}e^{i\omega t}dxdt=e^{i\nu x_0}e^{i\omega t_0} \tag{6}$$

Вывод функции Грина

Для построения функции Грина рассмотрим уравнение колебаний балки на вязкоупругом основании при воздействии мгновенного точечного воздействия (2). Дифференциальное уравнение в таком случае имеет вид:

$$EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+Ku+C\frac{\partial u}{\partial t}+\rho A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=q_\delta(x,t) \tag{7}$$

Применив преобразование Фурье по двум переменным к левой и правой частям уравнения (7) получим:

$$\tilde{G}(\nu,\omega)\left[EI\nu^4+K-iC\omega-\rho A\omega^2\right]=\tilde{q}_\delta(\nu,\omega) \tag{8}$$

При выполнении прямого преобразования Фурье используются свойства, представленные в выражениях (4).

Используя выражения (6) и (8), представим функцию Грина в частотной области:

$$\tilde{G}(\nu,\omega)=\frac{e^{i\nu x_0}e^{i\omega t_0}}{EI\nu^4+K-iC\omega-\rho A\omega^2} \tag{9}$$

Для определения функции Грина в зависимости от времени и пространственной переменной необходимо выполнить обратное преобразование Фурье:

$$G(x,t,x_0,t_0)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\nu(x-x_0)}e^{-i\omega(t-t_0)}}{EI\nu^4+K-iC\omega-\rho A\omega^2}d\nu d\omega \tag{10}$$

Для получения решения неоднородного уравнения (1) с произвольной правой частью $q(x,t)$ необходимо выполнить интегрирование:

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\infty}q(x_0,t_0)G(x,t,x_0,t_0)\,dx_0dt_0 \tag{11}$$

Интегральное представление решения

Как уже отмечалось выше, функция Грина позволяет получить решение в замкнутой форме в виде интеграла. При воздействии на балку сосредоточенной силы, движущейся с постоянной скоростью, правая часть уравнения определяется выражением:

$$q(x,t)=P\delta(x-Vt) \tag{12}$$

Наличие дельта функции в правой части уравнение позволит упростить выкладки.

Подставляя выражения(10) и (12) в формулу (11), получим

$$u(x,t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P\delta(x_0-Vt_0)e^{-i\nu(x-x_0)}e^{-i\omega(t-t_0)}}{EI\nu^4+K-iC\omega-\rho A\omega^2}d\nu d\omega dx_0dt_0 \tag{13}$$

Учитывая свойство функции Дирака (5), упростим выражение (13)

$$u(x,t)=\frac{P}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\nu(x-Vt_0)}e^{-i\omega(t-t_0)}}{EI\nu^4+K-iC\omega-\rho A\omega^2}d\nu d\omega dt_0 \tag{14}$$

Учитывая, что $\int_{-\infty}^{t} e^{i(\omega+\nu V)t_0}dt_0 = 2\pi\delta(\omega+\nu V)$ (см. свойство (5)), получим в подынтегральном выражении множителем функцию Дирака, которая позволит упростить выражение:

$$u(x,t) = \frac{P}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta(\omega+\nu V)e^{-i\nu x}e^{-i\omega t}}{EI\nu^4+K-iC\omega-\rho A\omega^2}d\nu d\omega \qquad (15)$$

Используя свойство (5) дельта функции, получим

$$u(x,t) = \frac{P}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\nu(x-Vt)}}{EI\nu^4+K+iC\nu V-\rho A\nu^2V^2}d\nu \qquad (16)$$

Вычисление несобственного интеграла (16) будет выполняться в комплексной плоскости с использованием контурного интегрирования и теории вычетов. Для этой цели найдем корни знаменателя подынтегрального выражения, который представляет собой биквадратное уравнение:

$$EI\nu^4+K+iC\nu V-\rho A\nu^2V^2=0 \qquad (17)$$

$$EI\nu^4+K+iC\nu V-\rho A\nu^2V^2=0$$

$$\nu^4+4\beta^4-\frac{V^2}{\alpha^2r^2}\nu^2=0$$

$$\nu^2=\frac{V^2}{2\alpha^2r^2}\pm\sqrt{\frac{V^2}{2\alpha^2r^2}-4\beta^4}$$

Для определения зависимости прогиба от пространственной координаты можно воспользоваться теорией вычетов, для чего необходимо знать корни знаменателя подынтегрального выражения (17).

$$\nu^4-\frac{1}{\alpha^2r^2}\cdot\nu^2V^2+4\beta^4+i\tilde{c}\nu V=0 \qquad (18)$$

Знаменатель подынтегрального выражения представляет собой полином четвертого порядка и, следовательно, имеет четыре корня. Два корня расположены в верхней полуплоскости и два в нижней.

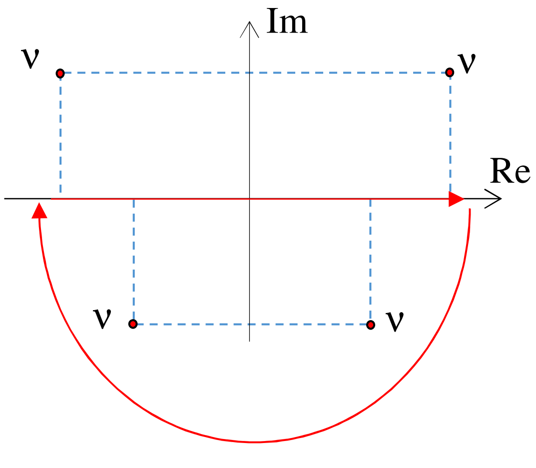

Рис. 2. Схема расположения корней знаменателя подынтегрального выражения (17) на комплексной плоскости

Для определения функции прогиба перед движущейся силой при $x-Vt \geq 0$ необходимо вычислить интеграл (10) по контуру, лежащему в нижней полуплоскости (рис. 2). В выражение для этого интеграла вносят вклад только полюсы, лежащие в нижней полуплоскости. Поэтому функцию прогиба можно представить в виде:

$$u(x,t)=\frac{P}{2\pi EI}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp\left[-i(x-Vt)\nu\right]}{\nu^4-\frac{1}{\alpha^2 r^2}\cdot\nu^2V^2+4\beta^4+i\tilde{c}\nu V}d\nu=$$
$$=\frac{P}{2\pi EI}\left[2\pi i\sum_{\operatorname{Im}\nu<0}\frac{\exp\left[-i(x-Vt)\nu\right]}{\nu^4-\frac{1}{\alpha^2 r^2}\cdot\nu^2V^2+4\beta^4+i\tilde{c}\nu V}\right] \tag{19}$$

Так как все полюсы первого порядка, вычеты определяются по формуле:

$$res\left\{\frac{\exp\left[-i(x-Vt)\nu\right]}{\nu^4-\frac{1}{\alpha^2 r^2}\cdot\nu^2V^2+4\beta^4+i\tilde{c}\nu V}\right\}_{\operatorname{Im}\nu<0}=\frac{\exp\left[-i(x-Vt)\nu_k\right]}{4\nu_k^3-\frac{2}{\alpha^2 r^2}\cdot\nu_kV^2+i\tilde{c}V} \tag{20}$$

Таким образом, функцию прогиба можно представить в виде:

$$u(x,t)=\frac{iP}{EI}\sum_{\operatorname{Im}\nu_k<0}\frac{\exp\left[-i(x-Vt)\nu_k\right]}{4\nu_k^3-\frac{2}{\alpha^2 r^2}\cdot\nu_kV^2+i\tilde{c}V} \tag{21}$$

Для определения функции прогиба за движущейся силой при $x-Vt<0$ необходимо учитывать только полюсы, лежащие в верхней полуплоскости.

$$u(x,t)=\frac{iP}{EI}\sum_{\operatorname{Im}\nu_k>0}\frac{\exp\left[-i(x-Vt)\nu_k\right]}{4\nu_k^3-\frac{2}{\alpha^2 r^2}\cdot\nu_kV^2+i\tilde{c}V} \tag{22}$$

Для определения перемещения произвольного сечения рельса во времени при проезде над ним сосредоточенной силы необходимо зафиксировать пространственную координату (например, $x=0$).

Для определения функции прогиба рельса под воздействием силы в данный момент времени необходимо зафиксировать временную координату (например, $t=0$).

Так как определение в общем аналитическом виде выражений для корней не представляется возможным, дальнейшие вычисления выполняются в программном комплексе MATLAB.

В качестве примера используется конструкция верхнего строения пути со следующими характеристиками: $K=7.5$ мПа, $E=2*10^5$ мПа, $I=3540*10^{-8}$ м^4, $m=320$ кг/м с учетом массы шпал, вязкое демпфирование:

$C = 2\xi\sqrt{Km}$, при $\xi = 0.01$. Сила, передающаяся колесом на рельс: $P = 115$ кН.

Для выявления зависимости между скоростями движения силы и прогибами, найдем корни выражения (17) при скоростях: $V_1 = 10$ м/с, $V_2 = 50$ м/с, $V_3 = 100$ м/с (таблица 1).

Таблица 1

Корни выражения (17)

Скорость V, м/с	*Корни выражения (11)*			
	v_1	v_2	v_3	v_4
10	0,7178 + 0,7166*i	-0,7178 + 0,7166*i	-0,7185 - 0,7166*i	0,7185 - 0,7166*i
50	0,7351 + 0,6974*i	-0,7351 + 0,6974*i	-0,7385 - 0,6974*i	0,7385 - 0,6974*i
100	0,7888 + 0,6337*i	-0,7888 + 0,6337*i	-0,7957 - 0,6337*i	0,7957 - 0,6337*i

Подставляя полученные корни в уравнения (22) и (23) при условии, что $x = 0$, построим график зависимости прогибов балки в начале координат от времени при разных скоростях (рис. 3).

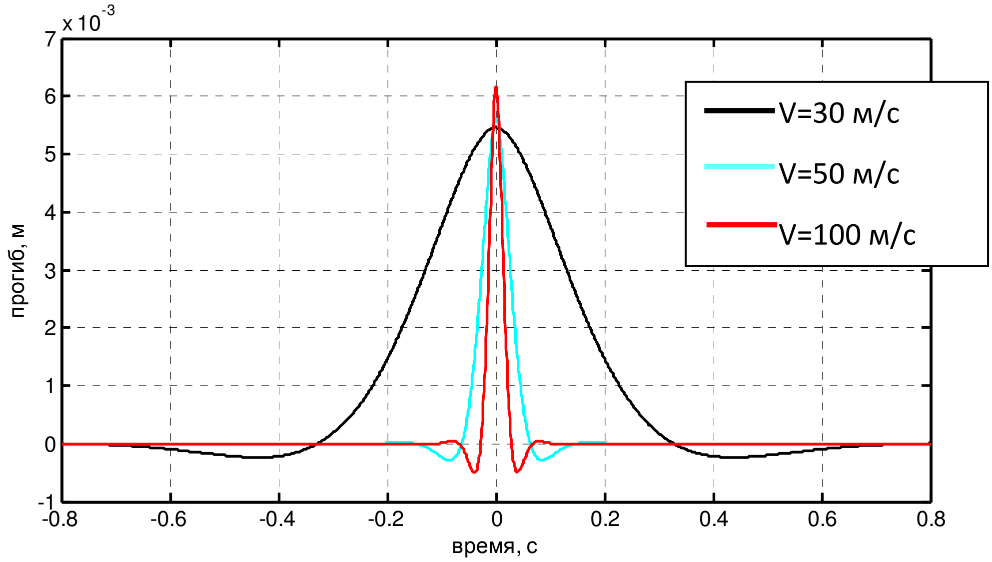

Рис. 3. Прогибы балки в начале координат ($x = 0$) при разных скоростях движения

Аналогично, приняв $t = 0$, найдем прогибы балки в момент прохождения силой начала координат при разных скоростях (рис. 4).

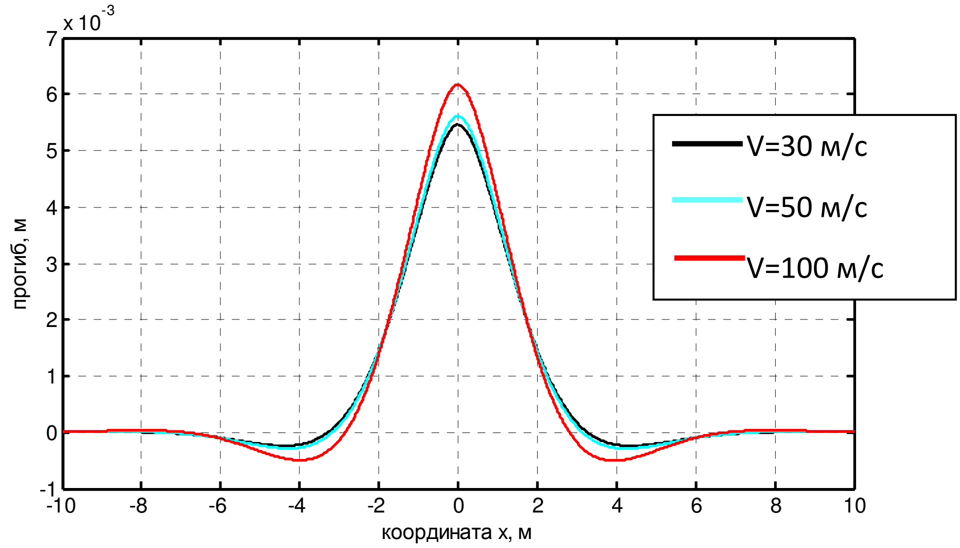

Рис. 4. Прогибы балки при разных скоростях движения в момент времени $t = 0$

Список литературы

1. Карасева А. А., Васильева М. А. Анализ мирового опыта развития высокоскоростного железнодорожного транспорта // Молодой ученый. 2016. № 6. С. 114–117. URL: https://moluch.ru/archive/110/26636/ (дата обращения: 28.04.2018).

2. Стратегия развития железнодорожного транспорта в Российской Федерации до 2030 года. URL: http://doc.rzd.ru.

3. Нгуен Чонг Там. Воздействие высокоскоростных подвижных нагрузок на балки, плиты и полупространство : дис. … канд. техн. наук. М., 2015. С. 27.

4. Fryba F., Telford Th. Vibration of solids and structures under moving loads. 3-d edition, 1999. 521 p.

5. Kim S. M. Stability and dynamic response of Rayleigh beam-columns on an elastic foundation under moving loads of constant amplitude and harmonic variation // Engineering structures. 2005. 12 p.

6. Kim S. M., Cho Y. C. Vibration and dynamic buckling of shear beam-columns on elastic foundation under moving harmonic loads // Iternational journal of solid and structures. 2006. P. 393-412.

7. Тимошенко С. П. Прочность и колебания элементов конструкций. М. : Наука, 1975. 704 с.

8. Krylov V. V. Vibrational impact of high-speed trains. I. Effect of track dynamics // Journ. Acoust. Soc. Am. 1996. № 100 (5). P. 3121–3134; erratum 1996. № 101 (6). P. 3810.

9. Krylov V. V. Spectra of low-frequency ground vibrations generated by highspeed trains on layered ground // Journ. Low Frequency Noise and Vibr. 1997. № 16(4). P. 257–270.

10. Love A. E. Treatise on the Mathematical theory of Elasticity. New York : Dover Publications, 1944.

11. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. 1. М. : ИЛ, 1958. 931 с.

12. Брычков Ю. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М., 1977. 288 с.

13. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. М. : Добросвет, 2000. 400 с.

14. Ануфриев Д. П., Купчикова Н. В. Эффективные строительные конструкции и технологии на Каспийском инновационном форуме – 2009. // Строительные материалы, оборудование, технологии XXI века. 2009. № 5. С. 52.

15. Новые конструкции и технологии при реконструкции и строительстве зданий и сооружений / Д. П. Ануфриев, Т. В. Золина, Л. В. Боронина, Н. В. Купчикова, А. Л. Жолобов. М. : АСВ, 2013. 208 с.