



$$F_d = 1 \cdot (1 \cdot 1741 \cdot 0,09 + 1,2 \cdot (1 \cdot 0,3 \cdot 9,2 + 1 \cdot 0,7 \cdot 35 + 1 \cdot 1,5 \cdot 22,125 + 1 \cdot 0,8 \cdot 10,26 + 1 \cdot 0,4 \cdot 29,15)) = 1 \cdot (73,575 + 1,2 \cdot (2,76 + 24,5 + 33,188 + 8,208 + 11,66)) = 253,07 \text{ кН} = 25,307 \text{ т}$$

Определим допустимую расчетную нагрузку на сваю:

$$F = \frac{F_d}{\gamma_k} = \frac{253,07}{1,4} = 180,76 \text{ кН} = 18,076 \text{ т}$$

Определение несущей способности свай по скважинам № 2 и 3 производится аналогично. Итоговые значения несущей способности и допустимой расчетной нагрузки на сваи по всем скважинам приведены в таблице 1.

Таблица 1  
Несущая способность и допустимая расчетная нагрузка на сваи

		Несущая способность, т	Допустимая расчетная нагрузка, т
Скважина №1	Свая СН 6-30	21,33	15,234
	Свая СН 4-30	25,307	18,076
Скважина №2	Свая СН 6-30	20,276	14,483
	Свая СН 4-30	16,08	11,485
Скважина №3	Свая СН 6-30	17,892	12,78
	Свая СН 4-30	13,5676	9,691

Результаты расчета несущей способности свай по данным статического зондирования, согласно [3], приведены в таблице 2.

#### Список литературы

1. ГОСТ 19912-2012. Грунты. Методы полевых испытаний статическим и динамическим зондированием.
2. Пояснительная записка по инженерно-геологическим изысканиям по объекту «2-этажный крытый рынок автозапчастей по ул. Б. Алексеева в Ленинском районе г. Астрахани». Астрахань : ГП «Каспрыбпроект», 2003.
3. Пособие по проектированию оснований зданий и сооружений (к СНиП 2.02.01-83) / НИИОСП им Н. М. Герсеванова Госстроя СССР. М., 1986.
4. Руководство по проектированию свайных фундаментов / НИИОСП им. Н. М. Герсеванова Госстроя СССР. М. : Стройиздат, 1980.
5. СНиП 2.02.03-85. Свайные фундаменты / Минстрой России. М. : ГП ЦПП, 1995. 48 с.
6. Шереметов И. М., Курдюк А. Ю. Геотехнический мониторинг основания зданий и сооружений Астраханского кремля // Геология, география и глобальная энергия. 2011. № 4 (43). С. 8–13.

© А. Ю. Курдюк, Д. П. Дисяев

УДК [69+699.841](083.74)

## РАСЧЕТ СЕЙСМИЧЕСКИХ СПЕКТРОВ ОТВЕТА С ПОМОЩЬЮ РЕКУРРЕНТНЫХ ФОРМУЛ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

**А. В. Синельщиков**

*Астраханский инженерно-строительный институт*

В работе рассмотрен вопрос построения сейсмических спектров ответа для целей расчета сейсмостойкости зданий и сооружений. Предложены рекуррентные формулы для интегрирования уравнений движения осциллятора с заданной частотой, позволяющие ускорить процесс получения решения. Приведено сравнение результатов интегрирования уравнения

Таблица 2  
Результаты расчета несущей способности свай по данным статического зондирования

Глубина, м	Несущая способность сваи, т		Расчетная нагрузка на одну сваю (κ = 1,25), т	
	песчаные	пылевато-глинистые	песчаные	пылевато-глинистые
1	19,0	14,8	-	11,8
2	34,9	23,3	-	18,7
3	42,0	27,4	-	21,9
4	50,1	32,6	-	26,1
5	63,0	40,2	-	32,2
6	72,2	46,8	-	37,4
7	79,4	50,1	-	40,1
8	133,8	102,8	107,1	-

Исходя из рассмотренных материалов, можно заключить:

- существующий в настоящее время свайный фундамент работает не на расчетную нагрузку, а на значительно меньшую, чем обозначенная в проекте, на листе 2 книги 2 – Архитектурно-строительные решения;
- несущая способность свай, определенная по трем скважинам для двух вариантов свай, не обеспечивает восприятия указанных в проекте расчетных нагрузок и не позволяет нести нагрузку от мансардного этажа в случае его устройства;
- несущая способность свай, определенная по данным статического зондирования, требует корректировки с учетом натурных испытаний свай;
- необходимо провести георадарное обследование основания с целью уточнения литологического строения [6].

движения полученных прямым интегрированием уравнений движения с результатами, полученными с помощью рекуррентных формул для синтезированной акселерограммы СА-482. Предложенные рекуррентные формулы могут быть использованы для расчета поэтажных спектров ответа.

**Ключевые слова:** сейсмический спектр ответа, дифференциальные уравнения движения, сейсмическое воздействие, линейно-спектральный метод, рекуррентные формулы, интегрирование дифференциального уравнения.

The paper considers the issue of obtaining seismic response spectra for calculating seismic stability of buildings and structures. The author suggests recurrent formula for integrating equations of oscillator motion at a given frequency; the formulas allow speeding up the process of obtaining solution. The paper provides comparative analysis of integrating equations of motion obtained by direct integration of motion equations and those obtained by using recurrent formulas for synthetic accelerogram CA-482. The suggested recurrent formulas can be used to calculate floor by floor response spectra.

**Key words:** seismic response spectrum, differential equations of motion, seismic effects, linear-spectral method, recurrence formulas, integration of the differential equation.

Конечной целью изучения сейсмической опасности является использование его результатов в сейсмостойком проектировании инженерных зданий и сооружений. Однако если сейсмологи в своих исследованиях в основном работают со спектрами Фурье [2], то инженеры по сейсмостойкому проектированию предпочитают использовать сейсмические спектры ответа (ССО) [5], строящиеся для колебаний семейства осцилляторов, моделирующих сооружение. Величина ССО отсчитывается на выходе фильтра с фиксированным набором затуханий  $\xi$ , заданных обычно в процентах от критического.

Применение ССО позволяет достаточно просто задавать сейсмическое воздействие (СВ), причем в одном ССО можно задать реакцию осцилляторов на действие трех компонент СВ – двух горизонтальных и одного вертикального. Однако расчет по ССО дает завышенные результаты, так как все значения реакций являются максимальными. Также не учитывается динамика воздействия, его длительность и то, что максимумы для различных осцилляторов наступают в различные моменты времени.

Тем не менее ССО остается СВ, определенным СНиП II-7-81\* [6] как основная модель сейсмического воздействия при обосновании сейсмостойкости линейно-спектральным методом (ЛСМ). В связи с этим построение эффективных алгоритмов вычисления ССО при разных значениях коэффициента относительного демпфирования  $\xi$  остается актуальной задачей.

Согласно ЛСМ конструкция рассматривается как набор осцилляторов (колебательных систем с единичной массой и собственной частотой (СЧ)  $\omega_m$ ). Каждый осциллятор под воздействием землетрясения совершает колебания. Максимальное значение ускорения как реакция колебательной системы на всем протяжении действия землетрясения является значением ССО для данной частоты, равной СЧ колебаний осциллятора. Таким образом, ССО – это график зависимости максимальных значений ускорений набора осцилляторов от их СЧ, как правило, от 1 до 30 Гц, и затухания.

Для получения ССО в рассмотрение вводят ряд независимых колебательных систем – ос-

цилляторов и вычисляют их отклик на 0 м, численно интегрируя уравнение движения (например, методом Рунге – Кутты):

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + \omega^2 x = \ddot{y}(t), \quad (1)$$

где  $\xi$  – коэффициент относительного демпфирования ( $\xi=0.02 \div 0.04$ );  $\omega$  – СЧ осциллятора (круговая частота, рад/с);  $\ddot{y}(t)$  – заданное СВ. Из полученного ряда выбирают максимальное значение, принимая его за реакцию осциллятора с заданной СЧ.

Одним из решений уравнения движения (1) при нулевых начальных условиях является интеграл Дюамеля:

$$x(\tau) = \int_0^t p(\tau)w(t-\tau)d\tau, \quad (2)$$

где  $p(\tau)$  – моделирующая функция (функция, задающая внешнее СВ);  $w(t-\tau)$  – функция, описывающая реакцию системы на импульс. В обозначениях уравнения (1) интеграл Дюамеля имеет вид:

$$x(t) = \frac{1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{y}(\tau) \exp[-\xi\omega(t-\tau)] \sin \omega_D(t-\tau) d\tau, \quad (3)$$

где  $\omega_D$  – СЧ осциллятора, скорректированная с учетом демпфирования:  $\omega_D = \sqrt{\omega^2 - \xi^2}$ .

Из теории колебаний известно, что решение уравнения (1) может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} \psi(t) = e^{-\varepsilon(t-t_0)} & \left[ \frac{\dot{\psi}(t_0) + \varepsilon\psi(t_0)}{\omega_D} \sin \omega_D(t-t_0) + \right. \\ & \left. + \psi(t_0) \cos \omega_D(t-t_0) \right] + \\ & + \frac{1}{\omega_D} \int_{t_0}^t \ddot{y}(\tau) e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $t_0$  – начальный момент времени интегрирования;  $\varepsilon$  – абсолютное демпфирование по  $m$ -ой форме колебаний:

$$\varepsilon = \xi\omega; \quad (5)$$

Выражение (4) состоит из двух частей и содержит общее решение, описывающее свободные колебания осциллятора и содержащее начальные условия в виде смещения и скорости в момент времени  $t_0$ , и частное, описывающее вынужденные колебания в виде интеграла

Дюамеля. Используя известные тригонометрические формулы, общее решение в (4) можно представить в виде:

$$\Psi^{cg}(t) = c_1 e^{-\varepsilon t} [a_1 \sin \omega_D t + b_1 \cos \omega_D t], \quad (6)$$

где  $c_1$ ,  $a_1$  и  $b_1$  – постоянные величины, связанные с начальными условиями и равные:

$$a_1 = \frac{\dot{\Psi}(t_0) + \varepsilon \Psi(t_0)}{\omega_D} \cos \omega_D t_0 + \Psi(t_0) \sin \omega_D t_0; \quad (7)$$

$$b_1 = -\frac{\dot{\Psi}(t_0) + \varepsilon \Psi(t_0)}{\omega_D} \sin \omega_D t_0 + \Psi(t_0) \cos \omega_D t_0;$$

$$c_1 = e^{\varepsilon t_0}.$$

Дифференцированием могут быть получены рекуррентные выражения для скорости:

$$\dot{\Psi}^{cg}(t) = c_1 e^{-\varepsilon t} [-a_2 \sin \omega_D t + b_2 \cos \omega_D t], \quad (8)$$

где

$$a_2 = a_1 \varepsilon + b_1 \omega_D, \quad (9)$$

$$b_2 = a_1 \omega_D - b_1 \varepsilon,$$

и ускорения:

$$\ddot{\Psi}^{cg}(t) = c_1 e^{-\varepsilon t} [a_3 \sin \omega_D t - b_3 \cos \omega_D t], \quad (10)$$

где

$$a_3 = a_2 \varepsilon - b_2 \omega_D, \quad (11)$$

$$b_3 = a_2 \omega_D + b_2 \varepsilon.$$

На рис. 1 показаны графики свободных колебаний осциллятора с СЧ  $\omega = 6$  Гц при  $\xi = 0,02$ , полученные прямым интегрированием уравнения (1) (пунктир) и с использованием рекуррентных формул (6), (8) и (10) при  $\Psi(t_0) = 0$  и  $\dot{\Psi}(t_0) = -1$ .

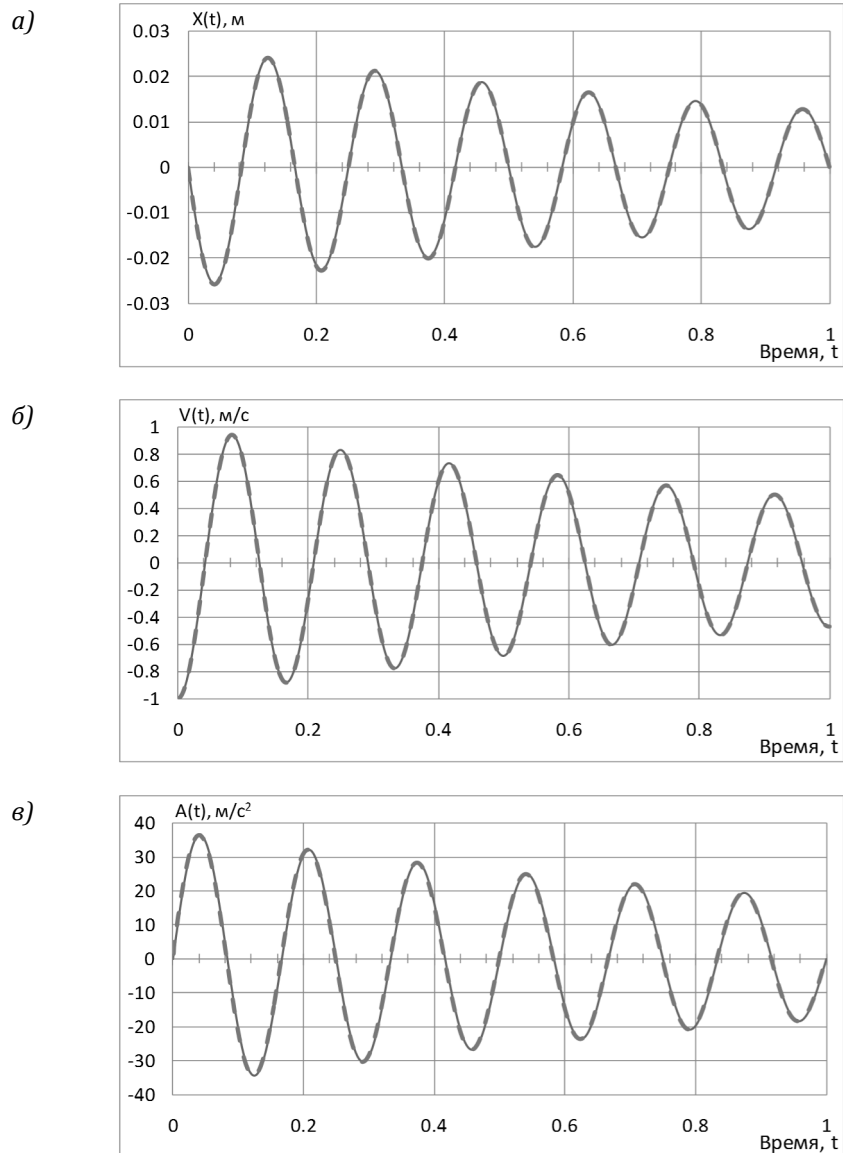


Рис. 1. Свободные колебания осциллятора с СЧ  $\omega = 6$  Гц при  $\xi = 0,02$ , полученные прямым интегрированием уравнения (1) (пунктир) и с использованием рекуррентных формул (6), (8) и (10) при  $\Psi(t_0) = 0$  и  $\dot{\Psi}(t_0) = -1$ : а – перемещение; б – скорость; в – ускорение

Выносом за знак интеграла переменного предела интегрирования и использованием тех же формул разложения частного решение в (4) можно привести к виду:

$$\Psi^{вын}(t) = \frac{e^{-\varepsilon t}}{\omega_D} [S_1 \sin \omega_D t - S_2 \cos \omega_D t], \quad (12)$$

где

$$S_1 = \int_{t_0}^t \ddot{y}(\tau) e^{\varepsilon \tau} \cos \omega_D \tau d\tau, \quad (13)$$

$$S_2 = \int_{t_0}^t \ddot{y}(\tau) e^{\varepsilon \tau} \sin \omega_D \tau d\tau. \quad (14)$$

Прямое вычисление интегралов (13)–(14), входящих в формулу для расчета вынужденных колебаний (12), известными численными методами требует значительных вычислительных затрат ввиду того, что для получения решения в любой точке интегрирование необходимо начинать с начального времени  $t_0$ . Более эффективно вычисления  $S_1$  и  $S_2$  целесообразно проводить с использованием рекуррентных формул:

$$\Psi^{вын}(t_k) = e^{-\varepsilon t_k} [r_k^{(1)} \sin \omega_D t_k - p_k^{(1)} \cos \omega_D t_k], \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} r_k^{(1)} &= r_{k-1}^{(1)} + \mu(\beta_{k-1} + \beta_k); \\ p_k^{(1)} &= p_{k-1}^{(1)} + \mu(\alpha_{k-1} + \alpha_k); \\ \beta_k &= \ddot{y}(t_k) e^{\varepsilon t_k} \cos \omega_D t_k; \\ \alpha_k &= \ddot{y}(t_k) e^{\varepsilon t_k} \sin \omega_D t_k; \\ \mu &= \frac{\tau}{2\omega_D}; \quad r_0^{(1)} = p_0^{(1)} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

В (15) и (16)  $k$  – номер точки траектории системы. Дифференцированием могут быть получены рекуррентные формулы для скорости:  $\dot{\Psi}^{вын}(t_k) = e^{-\varepsilon t_k} [-r_k^{(2)} \sin \omega_D t_k + p_k^{(2)} \cos \omega_D t_k]$ , (17) где

$$r_k^{(2)} = r_k^{(1)} \varepsilon - p_k^{(1)} \omega_D, \quad (18)$$

$$p_k^{(2)} = r_k^{(1)} \omega_D + p_k^{(1)} \varepsilon,$$

и ускорения

$$\ddot{\Psi}^{вын}(t_k) = e^{-\varepsilon t_k} [r_k^{(3)} \sin \omega_D t_k - p_k^{(3)} \cos \omega_D t_k], \quad (19)$$

где

$$r_k^{(3)} = r_k^{(2)} \varepsilon - p_k^{(2)} \omega_D, \quad (20)$$

$$p_k^{(3)} = r_k^{(2)} \omega_D + p_k^{(2)} \varepsilon.$$

Полное ускорение осциллятора будет складываться из его собственного ускорения (19) и внешнего воздействия  $\ddot{y}(t_k)$ :

$$\ddot{\Psi}^{полн}(t_k) = \ddot{\Psi}^{вын} + \ddot{y}(t_k). \quad (21)$$

Дополнительно, для повышения скорости расчетов в формулах (24) тригонометрические функции и функцию экспоненты также вычислим с помощью рекуррентных формул:

$$\sin \omega_D t_k = u_1 \cos \omega_D t_{k-1} + u_2 \sin \omega_D t_{k-1};$$

$$\cos \omega_D t_k = u_2 \cos \omega_D t_{k-1} - u_1 \sin \omega_D t_{k-1}; \quad (22)$$

$$e^{\varepsilon t_k} = u_3 e^{\varepsilon t_{k-1}};$$

$$u_1 = \sin \omega_D \tau; \quad u_2 = \cos \omega_D \tau; \quad u_3 = e^{\varepsilon \tau}.$$

Практическое применение формул покажем на примере синтезированной акселерограммы СА-482 [4] (рис. 2). Данная акселерограмма создавалась по методике [1], согласно которой рассматривался квазисинусоидальный колебательный процесс с непрерывно и определенным образом возрастающей частотой. Задаваемая в различных интервалах частоты скорость ее изменения обеспечила резонанс осциллятора для частотных зон в диапазоне от 2 до 10 Гц. В начале процесса амплитуда акселерограммы  $\dot{y}(t)$  максимальна, а затем быстро снижается в два раза. При этом спектры ответа в данных зонах плавно и непрерывно (без существенных провалов и пиков) возрастают, выходят на постоянный уровень и, наконец, снижаются (рис. 3).

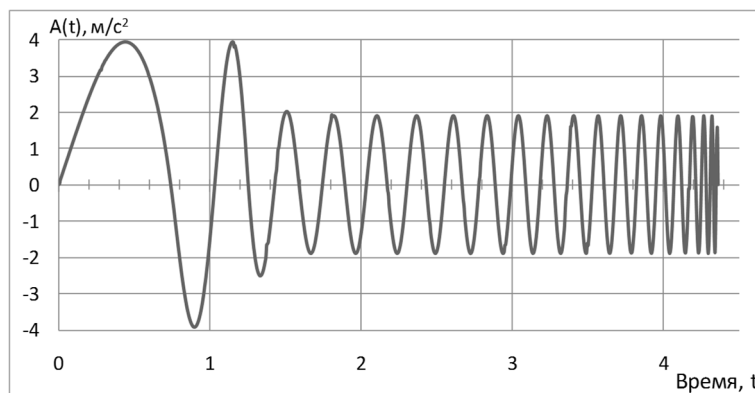


Рис. 2. Синтезированная акселерограмма СА-482 [4]

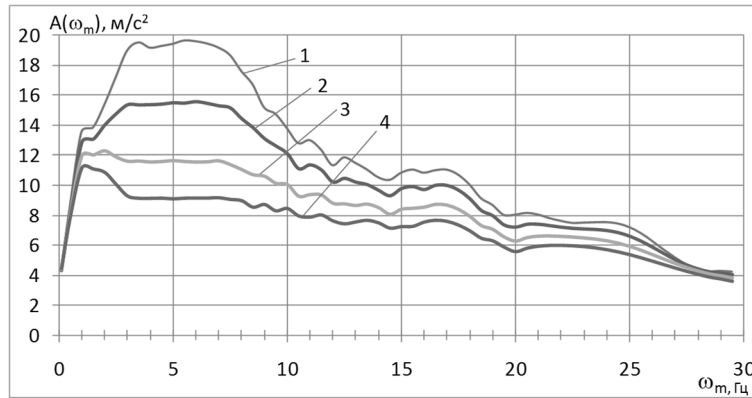


Рис. 3. ССО синтезированной акселерограммы СА-482 при различных значениях  $\xi$   
 1 -  $\xi = 0,02$ ; 2 -  $\xi = 0,04$ ; 3 -  $\xi = 0,07$ ; 4 -  $\xi = 0,1$

Согласно [4] преимущества использования СА-482 заключаются в следующем:

1. СА-482 не избирательна к собственным частотам объекта? и при отклонениях их значений в ту или другую сторону, из-за конструктивных изменений или погрешностей моделирования, уровни ответа объекта (в том числе поэтажных акселерограмм и спектров ответа) на это воздействие не будут иметь резких изменений. Аналоговые акселерограммы, напротив, являются частотно-избирательными. Ответная реакция объекта при таких воздействиях может сильно изменяться в зависимости от его собственных частот.

2. СА-482 имеет малую продолжительность (4,3 с) по сравнению с большинством аналоговых акселерограмм (15–30 с), что существенно снижает трудоемкость расчетов и затраты времени.

3. СА-482 обобщает в себе свойства всех типов акселерограмм: низкочастотных (Бухарест), высокочастотных (Газли) и среднечастотных (Эль-Центро). Ее можно использовать вместо регламентируемой [3] группы аналоговых акселерограмм (обычно из 4–10 штук).

4. С помощью трех ортогональных акселерограмм СА-482 можно моделировать синхронное трехкомпонентное сейсмическое воздействие для консервативных расчетов сложных пространственных объектов. Применение в этом качестве аналоговых акселерограмм сопряжено со значительными неопределенностями в подборе компонент по их частотным характеристикам, длительностям, интенсивностям, фазовым сочетаниям, моментам времени проявления наибольшего влияния. Использование группы совместных трехкомпонентных записей акселерограмм устраняет перечисленные выше неопределенности. Однако такие записи чрезвычайно редки, и они также не решают проблемы достаточной консервативности (надежности) расчета.

Как видно из рис. 3, максимальное значение ССО синтезированной акселерограммы СА-482

при  $\xi = 0,02$  соответствует частоте  $\omega = 6$  Гц. На рис. 4 показана реакция осциллятора с СЧ  $\omega = 6$  Гц при  $\xi = 0,02$ , полученная прямым интегрированием уравнения (1) (пунктир) и с использованием рекуррентных формул (15), (17) и (21).

Полное смещение по каждой из форм колебаний для любого момента времени может быть получено путем суммирования (6) и (15):

$$\Psi(t) = \Psi^{CG}(t) + \Psi^{BHH}(t). \quad (23)$$

Учитывая (6) и (7), рабочая формула (23) для расчета  $k$ -ой точки траектории по рассматриваемой форме колебаний имеет вид:

$$\Psi(t_k) = e^{-\xi t_k} [(a_2 + r_k^{(1)}) \sin \omega_D t_k + (b_2 - p_k^{(1)}) \cos \omega_D t_k], \quad (24)$$

$$a_2 = a_1 c_1; \quad b_2 = b_1 c_1. \quad (25)$$

Аналогичным образом, путем суммирования (8) и (17), а также (10) и (21) могут быть получены выражения для скорости:

$$\dot{\Psi}(t_k) = e^{-\xi t_k} [-(a_3 + r_k^{(2)}) \sin \omega_D t_k + (b_3 + p_k^{(2)}) \cos \omega_D t_k], \quad (26)$$

где

$$a_3 = a_2 c_1; \quad b_3 = b_2 c_1. \quad (27)$$

и ускорения:

$$\ddot{\Psi}(t_k) = e^{-\xi t_k} [(a_4 + r_k^{(3)}) \sin \omega_D t_k - (b_4 + p_k^{(3)}) \cos \omega_D t_k] + \ddot{y}(t_k) \quad (28)$$

где

$$a_4 = a_3 c_1; \quad b_4 = b_3 c_1. \quad (29)$$

При расчете сооружений по ЛСМ, находящихся в зданиях и воспринимающих СВ как вторичные системы, используют поэтажные сейсмические спектры ответа (ПССО). При построении ПССО используются те же формулы, что и для ССО, однако исходным СВ является ПА, полученная для конкретной конструкции на заданной высотной отметке. Получаемый ПССО как решение уравнения (1), так же как и ПА, отражает реакцию конструкции на заданной высотной отметке.

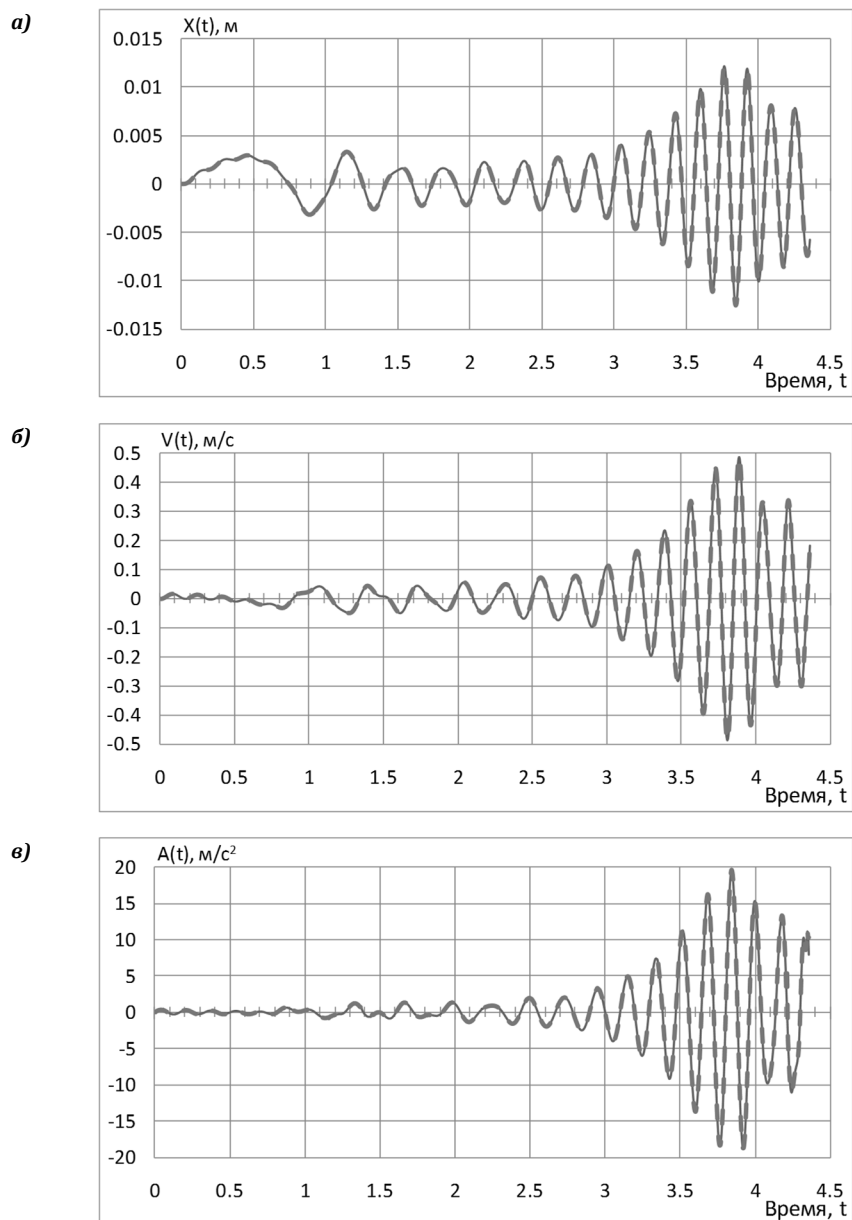


Рис. 4. Реакция осциллятора с СЧ  $\omega = 6$  Гц при  $\xi = 0,02$ , полученная прямым интегрированием уравнения (1) (пунктир) и с использованием рекуррентных формул (15), (17) и (21): а – перемещение; б – скорость; в – ускорение

#### Список литературы

1. Ветошкин В. А. Синтезированная модель сейсмического воздействия // Труды ЦКТИ. 1984. Вып. 212. С. 41–52.
2. Панасенко Н. Н., Синельщикова Л. С., Синельщиков А. В. Спектральный анализ Фурье вероятностно-статистических акселерограмм // Вестник Астраханского гос. техн. ун-та. Астрахань : Изд-во АГТУ, 2012. № 2 (54). С. 22–31.
3. ПНАЭ Г-7-002-86. Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок. М. : Энергоатомиздат, 1989.
4. РТМ 108.020.37–81 (с изм. № 1 1985 г.). Оборудование атомных энергетических установок. Расчет на прочность при сейсмическом воздействии. Л. : НПО ЦКТИ, 1986. 35 с.
5. Синельщиков А. В., Панасенко Н. Н. Спектральный анализ сейсмических воздействий в теории сейсмостойкости подъемных сооружений // Вестник Астраханского гос. техн. ун-та. Астрахань : Изд-во АГТУ, 2008. № 2 (43). С. 136–138.
6. СНиП II-7-81\*. Строительство в сейсмических районах. М. : ЦИТП Госстроя России, 1996. 69 с.

© А. В. Синельщиков