

# СТРОИТЕЛЬСТВО. ИНЖЕНЕРНЫЕ ИЗЫСКАНИЯ И ОБСЛЕДОВАНИЕ ЗДАНИЙ

УДК 624.072

## ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОЭТАЖНЫХ РАМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

О. Б. Завьялова, А. И. Шеин

Астраханский государственный архитектурно-строительный университет  
Пензенский государственный университет архитектуры и строительства

Рассмотрено применение условного сдвиго-изгибного стержня, которым заменяется многоэтажная регулярная рама с любым числом пролетов, имеющая различное сечение колонн на разных ярусах и заданное соотношение нагрузок, при расчете критических сил приближенным способом. Предлагаемая методика позволяет учесть в раме одновременно деформации изгиба и сдвига. Дифференциальные уравнения равновесия аппроксимируются методом конечных разностей, что позволяет получить систему однородных алгебраических уравнений. Приведены примеры расчета критических нагрузок в многоэтажных двух- и трехъярусных рамах, выполнено сравнение с результатами расчета по программе SCAD Office.

**Ключевые слова:** многоэтажная рама, устойчивость, критические нагрузки, метод конечных разностей.

## APPROXIMATE CALCULATION OF STABILITY OF MULTYSTORIED FRAMES WITH USE OF THE METHOD OF FINAL DIFFERENCES

O. B. Zavyalova, A. I. Shein

Astrakhan State University of Architecture and Civil Engineering  
Penza State University of Architecture and Construction

Application of a conditional the shear-flexural core which replaces the multystoried regular frame with any number of flights having various section of columns on different tiers and the set ratio of loadings, when calculating critical forces in the approximate way is considered. The offered technique allows to consider in a frame at the same time deformations of a bend and shift. The differential equations of balance are approximated by method of final differences that allows to receive system of the uniform algebraic equations. Examples of calculation of critical loadings in multystoried 2- and 3-level frames are given, comparison with results of calculation for the SCAD Office program is executed.

**Keywords:** multystoried frame, stability, critical loadings, method of final differences.

Обычно при проектировании многоэтажных рам последние разделяют на несколько уровней по высоте и рассчитывают сечения колонн каждого уровня. Колонны разных уровней могут отличаться не только процентом армирования, но и размерами поперечных сечений. Рассмотрим применение метода конечных разностей к расчету устойчивости рам с дискретно изменяющимися по высоте жесткостными параметрами. Реальную раму заменим условным сдвиго-изгибным стержнем [1]. Допустим, требуется выполнить расчет на устойчивость многоэтажной рамы, у которой сечения ригелей на всех этажах одинаковы, сечения стоек разделены на  $n$  уровней, высота уровней одинакова.

Заменяем раму условным сдвиго-изгибным стержнем переменной жесткости, защемленным в основании (рис. 1).

Изгибная жесткость условного стержня на каждом уровне вычисляется по формуле:

$$EI_{\text{усл.}} = E \times \sum (A_i \times r_i^2 + I_{oi}), \quad (1)$$

где  $E$  – модуль упругости стоек рамы;  $A_i$  – площадь сечения  $i$ -й стойки рамы;  $r_i$  – расстояние от оси  $i$ -й стойки до осевой линии рамы;  $I_{oi}$  – собственный момент инерции  $i$ -й стойки.

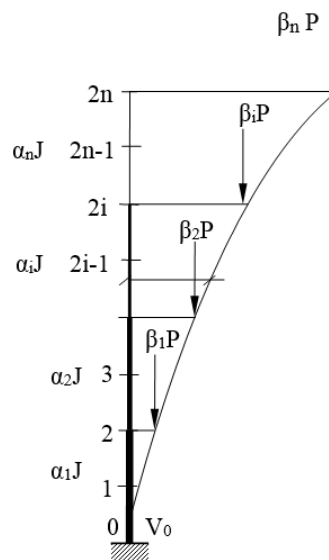


Рис. 1. Замена рамы условным стержнем

Сдвиговая жесткость:

$$GA_{\text{усл.}} = \ell / \delta, \quad (2)$$

где  $\ell$  – высота этажа;  $\delta$  – средняя податливость ячейки рамы от сдвига:

$$\delta = [\ell^2 / 12] \times (1/s + 1/r) \quad (3)$$

Определим вначале критические нагрузки без учета деформаций сдвига.

Дифференциальные уравнения равновесия каждого участка в отклоненном состоянии заменяем уравнениями в конечных разностях [2, 3]. Составим, таким образом, систему однородных уравнений. Приравняв ее определитель нулю, получим критические нагрузки.

Примем изгибные жесткости участков (уровней рамы) связанными соотношениями:  $EI_1 = \alpha_1 EI$ ,  $EI_2 = \alpha_2 EI$ , ...,  $EI_n = \alpha_n EI$ .

Нагрузки на уровни  $P_1 = \beta_1 P$ ,  $P_2 = \beta_2 P$ , ...,  $P_n = \beta_n P$ . Для границ участков будем учитывать среднюю жесткость примыкающих уровней, например, для границы 1 и 2 участков  $\alpha_{1,2} = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$ . На каждом участке учитываем по два сечения. Шаг сечений  $\Delta$  равен половине высоты уровня.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -\frac{\beta_1 c}{\alpha_1} & 0 & -\frac{\beta_2 c}{\alpha_1} & 0 & -\frac{\beta_3 c}{\alpha_1} & \dots & -\frac{\beta_i c}{\alpha_1} & \dots & -\frac{\beta_n c}{\alpha_1} \\ c(\beta_1 + \dots + \beta_n) - 2 & 1 - \frac{\beta_1 c}{\alpha_1} & 0 & -\frac{\beta_2 c}{\alpha_1} & 0 & -\frac{\beta_3 c}{\alpha_1} & \dots & -\frac{\beta_i c}{\alpha_1} & \dots & -\frac{\beta_n c}{\alpha_1} \\ \alpha_1 & \frac{\alpha_1}{c(\beta_2 + \dots + \beta_n) - 2} & 1 & -\frac{\beta_2 c}{\alpha_{1,2}} & 0 & -\frac{\beta_3 c}{\alpha_{1,2}} & \dots & -\frac{\beta_i c}{\alpha_{1,2}} & \dots & -\frac{\beta_n c}{\alpha_{1,2}} \\ 1 & \frac{c(\beta_2 + \dots + \beta_n)}{\alpha_{1,2}} - 2 & 1 & -\frac{\beta_2 c}{\alpha_{1,2}} & 0 & -\frac{\beta_3 c}{\alpha_{1,2}} & \dots & -\frac{\beta_i c}{\alpha_{1,2}} & \dots & -\frac{\beta_n c}{\alpha_{1,2}} \\ 0 & 1 & \frac{c(\beta_2 + \dots + \beta_n)}{\alpha_2} - 2 & 1 - \frac{\beta_2 c}{\alpha_2} & 0 & -\frac{\beta_3 c}{\alpha_2} & \dots & -\frac{\beta_i c}{\alpha_2} & \dots & -\frac{\beta_n c}{\alpha_2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{c(\beta_3 + \dots + \beta_n)}{\alpha_{2,3}} - 2 & 1 & -\frac{\beta_3 c}{\alpha_{2,3}} & \dots & -\frac{\beta_i c}{\alpha_{2,3}} & \dots & -\frac{\beta_n c}{\alpha_{2,3}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{c(\beta_3 + \dots + \beta_n)}{\alpha_3} - 2 & 1 - \frac{\beta_3 c}{\alpha_3} & \dots & -\frac{\beta_i c}{\alpha_3} & \dots & -\frac{\beta_n c}{\alpha_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \frac{c(\beta_i + \dots + \beta_n)}{\alpha_i} - 2 & 1 - \frac{\beta_i c}{\alpha_i} & \dots & -\frac{\beta_i c}{\alpha_i} & \dots & -\frac{\beta_n c}{\alpha_i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{c\beta_n}{\alpha_n} - 2 & 1 - \frac{\beta_n c}{\alpha_n} \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

Дифференциальное уравнение равновесия на  $i$ - участке:

$$y_i''(x) + \frac{P}{\alpha_i EI} \left[ \beta_i (V_i(x) - V_{2i}) + \beta_{i+1} (V_i(x) - V_{2(i+1)}) + \dots + \beta_n (V_i(x) - V_{2n}) \right] = 0. \quad (4)$$

Уравнения в конечных разностях для точек  $i$ - участка:

- точка  $2i-1$  (середина участка):

$$\frac{V_{2i-2} - 2V_{2i-1} + V_{2i}}{\Delta^2} + \frac{P}{\alpha_i EI} \left[ \beta_i (V_{2i-1} - V_{2i}) + \dots + \beta_n (V_{2i-1} - V_{2n}) \right] = 0,$$

- точка  $2i$  (верхняя граница участка):

$$\frac{V_{2i-1} - 2V_{2i} + V_{2i+1}}{\Delta^2} + \frac{P}{\alpha_{i,i+1} EI} \left[ \beta_{i+1} (V_{2i} - V_{2(i+1)}) + \dots + \beta_n (V_{2i} - V_{2n}) \right] = 0.$$

Выполним замену:  $\frac{P}{EI} = k^2$ ,  $k^2 \Delta^2 = c$  и составим определитель системы уравнений в конечных разностях порядка  $2n \times 2n$ :

Несмотря на кажущуюся трудоемкость использования полученного определителя, вычисление критических сил не представляет собой сложности. Предположим, требуется определить критическую силу Эйлера для двухуровневой рамы (рис. 2) при соотношении изгибных жесткостей нижнего и верхнего уровней 2:1 и равных силах  $P_1$  и  $P_2$ . Имеем:  $\alpha_1 = 2$ ,  $\alpha_2 = 1$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ .

Определитель (5) из коэффициентов при неизвестных примет вид:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -\frac{c}{2} & 0 & -\frac{c}{2} \\ c-2 & 1-\frac{c}{2} & 0 & -\frac{c}{2} \\ 1 & \frac{2c}{3}-2 & 1 & -\frac{2c}{3} \\ 0 & 1 & c-2 & 1-c \end{vmatrix} = 0$$

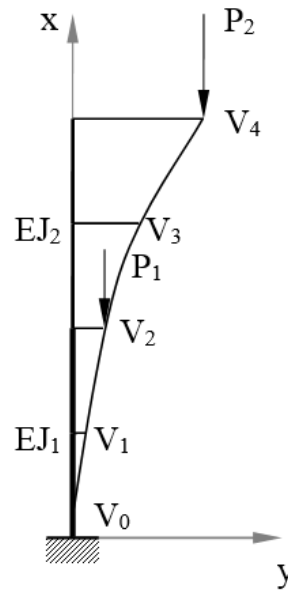


Рис. 2. К расчету двухуровневой рамы

Приравняв определитель нулю, получим наименьшее значение  $c = 0,23017$ . Если  $c = k^2 \Delta^2$ , то  $k^2 = c/\Delta^2 = P/EI$ , при  $\Delta^2 = \left(\frac{l}{4}\right)^2$  найдем:

$$P_{кр} = \frac{cEI}{\Delta^2} = \frac{0,23017EI}{\Delta^2} = \frac{3,683EI}{l^2}.$$

Точное решение для такого случая  $P_{кр} = \frac{3,651EI}{l^2}$ , погрешность составила 0,9 %. При той же нагрузке и одинаковой жесткости уровней ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ) наименьшее значение  $c = 0,1281$ ,  $P_{кр} = \frac{cEI}{\Delta^2} = \frac{0,1281EI}{\Delta^2} = \frac{2,05EI}{l^2}$ . Точное решение

в этом случае  $P_{кр} = \frac{2,067EI}{l^2}$ , погрешность 0,8 %.

Примем соотношение нагрузок  $P_1/P_2 = 3$ . Получим из определителя (5) при  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ ,  $\beta_1 = 3$ ,  $\beta_2 = 1$  наименьшее значение  $c = 0,09355$ , откуда  $P_{кр} = \frac{1,497EI}{l^2}$ , точное решение найдем в [4, с. 480]:

$$P_{кр} = \frac{1,515EI}{l^2}, \text{ погрешность } -1,2 \%$$

Получим решение для стержня, заменяющего трехъярусную раму (рис. 3).

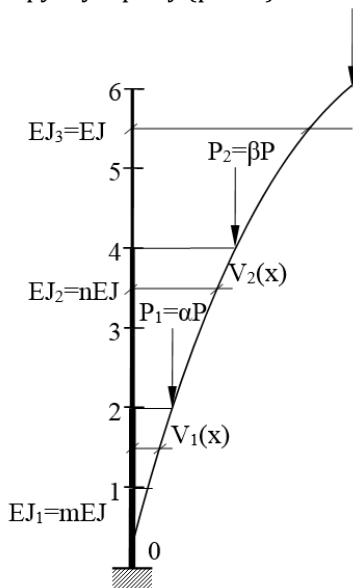


Рис. 3. К расчету трехуровневой рамы

При  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$  (постоянная жесткость) и  $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$  (силы равны) определитель (5) примет вид:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -c & 0 & -c & 0 & -c \\ 3c-2 & 1-c & 0 & -c & 0 & -c \\ 1 & 2c-2 & 1 & -c & 0 & -c \\ 0 & 1 & 2c-2 & 1-c & 0 & -c \\ 0 & 0 & 1 & c-2 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c-2 & 1-c \end{vmatrix} = 0$$

Наименьшее решение полученного определителя  $c = 0,04629$ ;  $\Delta = l/6$ .

$$\text{Тогда } k^2 = c/\Delta^2 = 36c/l^2 = P/EI, P_{кр} = \frac{1,667EI}{l^2}.$$

Следует отметить, что для всех рассмотренных примеров двух- и трехъярусных рам определение критических нагрузок было выполнено без учета сдвига. Нашей целью здесь было получить простые выражения в виде определителей для вычисления критической силы Эйлера, позволяющие, тем не менее, получать результаты высокой точности. Учет деформаций сдвига можно затем производить по формуле Энгесера [5, с. 35] (в предположении упругой работы материала):

$$P_{кр} = P^Э \cdot \frac{1}{1 + \frac{k}{GA} \cdot P^Э}, \quad (6)$$

где  $P^Э$  – критическая сила Эйлера,  $k$  – коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения.

Многочисленные расчеты на устойчивость, выполненные авторами для регулярных рам различной этажности, состоящих из одного или нескольких пролетов, позволили обнаружить следующую зависимость:  $k = 2,3$  – для одно- и двухпролетных рам,  $k = 2,5$  – для трех- и четырехпролетных рам.

В случае расчета рам с дискретно изменяющимися по высоте жесткостными параметрами усредненная сдвиговая жесткость условного стержня, которым заменяется рама, может быть вычислена по формуле:

$$GA_{усл} = (GA_{усл1} + GA_{усл2} + \dots + GA_{услN})/N,$$

где  $N$  – число уровней рамы.

В заключение отметим, что критические силы, вычисленные точным расчетом с применением программы SCAD и приближенным способом, совпадают с точностью до 1–5 %.

#### Список литературы

1. Завьялова О. Б. Исследование работы рам на горизонтальные нагрузки // Известия вузов. Строительство. 2004. № 3. С. 93–99.
2. Варвак П. М., Варвак Л. П. Метод сеток в задачах расчета строительных конструкций. М.: Стройиздат, 1977. 155 с.
3. Караманский Т. Д. Численные методы строительной механики. М.: Стройиздат, 1981. 434 с.
4. Киселев В. А. Строительная механика. Спец. курс. Динамика и устойчивость сооружений: учебник для вузов. М.: Стройиздат, 1980. 616 с.
5. Клейн Г. К. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики: учеб. пособие для вузов. М.: Высшая школа, 1972. 317 с.

6. Завьялова О. Б., Шейн А. И. Применение условного сдвиго-изгибного стержня при расчете рам на устойчивость // Известия вузов. Строительство. 2010. № 1. С. 99–105.

© О. Б. Завьялова, А. И. Шейн

**Ссылка для цитирования:**

Завьялова О. Б., Шейн А. И. Приближенный расчет устойчивости многоэтажных рам с использованием метода конечных разностей // Инженерно-строительный вестник Прикаспия : научно-технический журнал / Астраханский государственный архитектурно-строительный университет. Астрахань : ГАОУ АО ВО «АГАСУ», 2016. № 4 (18). С. 24–27.

УДК 69.033.15.001.63(075.8):620.97:69.059.14

**ИГРА В СКОРЛУПКИ, ИЛИ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПНЕВМОКОНСТРУКЦИЙ  
В КАЧЕСТВЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ЭЛЕМЕНТА ЗДАНИЙ**

*Р. И. Шаяхмедов*

*Астраханский государственный архитектурно-строительный университет*

Обоснована возможность использования пневмоконтрукций как динамического энергосберегающего и аккумулирующего энергию элемента зданий. При этом в качестве динамического элемента предлагается использовать пневматический многосекционный колокол, включающий прозрачные и теплоизолирующие секции. Внутри колокола располагается здание и зимний сад. В процессе эксплуатации колокол поворачивается так, что его прозрачные секции всегда ориентируются на солнце. Внутренняя поверхность пневмоколокола (кроме прозрачных секций) делается отражающей свет (металлизируемая полимерная пленка). Эта поверхность создает эффект «зеркального стакана», где ни одна частица света не пропадает зря. В пасмурную погоду и в ночное время светоотражающие секции поворачиваются так, что соприкасаются с обратной стороны с пневматическими фиксаторами, препятствующими потерям тепла, через прозрачную поверхность. В верхней своей точке (зените) колокол опирается на подшипник, установленный на самой высокой точке здания. Нижней своей кромкой колокол фиксируется эластичным фиксатором, работающим как пневматический подшипник в моменты поворота колокола.

**Ключевые слова:** пневматическая конструкция, динамический элемент, энергосбережение, накопление солнечной энергии, прозрачная поверхность, теплоизолирующая поверхность, пневматический фиксатор, эластичный фиксатор, пневматический подшипник.

**GAME THIMBLES IT OR USE AS A PNEUMATIC DYNAMIC ELEMENT OF BUILDINGS**

*R. I. Shajahmedov*

*Astrakhan State University of Architecture and Civil Engineering*

Justified by the possibility of using pneumatic as dynamic energy saving and accumulating energy element of buildings. The dynamic member is invited to use pneumatic multisection bell, including transparent and heat-insulating sections. The building is located inside the bell and a winter garden. During the operation of the bell rotated so that its transparent sections, always oriented towards the Sun. The inner surface of the PC (except transparent sections) is done by reflecting light (metallized polymeric film). This surface creates a «mirror effect glass», where no beacon of light is not wasted. In cloudy weather and at night reflective sections are rotated so that contact with the underside with pneumatic spacers to prevent heat losses through the transparent surface. In its upper point (Zenith) Bell relies on the bearing at the highest point of the building the lower edge Bell fixed elastic retainer, running as a pneumatic bearing, in moments of turning bell.

**Key words:** pneumatic design, dynamic, energy saving, accumulation of solar energy, transparent the surface, lagging the surface, pneumatic retainer, elastic retainer, pneumatic bearing.

Индивидуализация жилья открывает новые возможности его удешевления, повышения экономичности и улучшения экологии. Отдельный дом предоставляет гораздо больший простор для применения принципа динамической трансформации, чем многоквартирные жилые помещения.

*...Морозный, ветреный зимний день. На базаре в связи с этим публики маловато, и профессиональный игрок-наперсточник, вкупе с подсадными, работают вяло, без огонька. Что-то необычное на этот раз режет глаз в этой игре. Да, это очень большие размеры шарика, катающегося между стаканчиками, почти с внутренний диаметр стаканчика. Стаканчик как бы «одевает» теннисный мяч, пряча его от ветра и стужи.*

Вот так бы и легкий индивидуальный дом укрывать зимой «стаканчиком» из теплоизоляционных материалов. Только стаканчик должен

быть легким и быстровозводимым, например, в виде колокола из нескольких пневмосекций (секционная конструкция колокола увеличит его живучесть и ремонтпригодность).

Доставить такой пневматический колокол (ПК) в свернутом виде можно на обычном грузовике, и надуть его несложно с помощью насоса, работающего от вала отбора мощности того же грузовика, а вот надеть (а по окончании отопительного сезона снять) без использования крановой техники можно не на каждый индивидуальный дом.

Вот если бы колокол мог взлетать сам... В принципе, и это сделать несложно. Для этого (рис. 1) на спецмашине (1) устанавливаются баллоны (2) с гелием [1, 2], которым и производится первоначальный наддув (3) секций колокола (4).

Колокол (рис. 2) превращается в аэростат с небольшой подъемной силой, и несколько