УДК 514.17

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЗАМКНУТОСТИ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СУММЫ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ЗАМКНУТЫХ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

К. Д. Яксубаев, Д. Д. Кочергина
Астраханский государственный архитектурно-строительный университет
Институт мировой экономики и финансов

В статье выводятся необходимые и достаточные условия замкнутости алгебраической суммы замкнутых выпуклых множеств в конечномерном пространстве. В конечномерном случае удалось получить необходимые условия, близкие к достаточным.
Ключевые слова: *алгебраическая сумма выпуклых множеств, замкнутость, конусы.*

NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR CLOSEDNESS THE ALGEBRAIC SUMS UNLIMITED CLOSED CONVEX SETS

K. D. Yaksubaev, D. D. Kochergina
Astrakhan State University of Architecture and Civil Engineering
Institute of World Economy and Finance (Astrakhan)

This paper derives necessary and sufficient conditions for the closedness of the algebraic sum of closed convex sets in finite-dimensional space. In the finite-dimensional case it was possible to obtain the necessary conditions close to enough.
Keywords: *algebraic sum of convex sets, isolation, cones.*

Целью настоящей работы является исследование замкнутости алгебраической суммы $\Omega = \mathrm{A} + \mathrm{B}$ двух замкнутых выпуклых множеств в R^m. По определению алгебраической суммы $\Omega = \{\mathrm{a} + \mathrm{b} : \mathrm{a} \in \mathrm{A}, \mathrm{b} \in \mathrm{B}\}$. Очевидно, что если одно из множеств A или B компактно, то Ω замкнуто.

Хорошо известный пример на двумерной плоскости, где $\mathrm{A} = \{(x, y) : xy \geq 1, x \geq 0, \mathrm{B} = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) : \mathrm{xy} \leq -1, \mathrm{x} \leq 0\}$, для которого множество Ω – верхняя открытая полуплоскость, показывает, что в общем случае сумма замкнутых выпуклых может оказаться незамкнутой. Полученные результаты свидетельствуют, что в некотором смысле этот пример типичен. Специфика задачи такова, что естественнее исследовать необходимые и достаточные условия незамкнутости, а затем уже собрать из них необходимые и достаточные условия замкнутости.

Определение l. Множество K называется конусом, если из $x, y \in K$, $\alpha, \beta \geq 0$ следует $\alpha x + \beta y \in K$, конус K называется нормальным, если $K \cap \{-K\} = 0$, и телесным, если $intK \neq \emptyset$.

Определение 2. Множество A называется цилиндром κ-го порядка $(k \geq 1)$ с образующей R^k, если из $x \epsilon A$ следует $x + R^k \subset A$, и строго κ-го порядка, если A/R^k не цилиндр.

Определение 3 [1]. Конус K – внутренний конус множества A в точке $x_0 \epsilon \bar{\mathrm{A}}$, если $\{x_0 + K\} \backslash x_0 \subset A$ и не существует конуса K_1, такого, что $K \neq K_1$, $K \subset K_1$ и $\{x_0 + K_1\} \backslash x_0 \subset A$. Внутренний конус в точке x_0 обозначим через $K_{x_0}(A)$, и если он не зависит от точки, то просто $K(A)$.

Определение 4. Конус K называется конусом, порожденным точкой x_0 как вершиной и множеством A, если $K = \bigcup\limits_{t \geq 0} t(A - x_0)$. Обозначается он $K(x_0, A)$.

Определение 5. Пусть множество A выпукло и замкнуто. Афинная κ-мерная плоскость $P^k (k \geq 1)$ асимптотна к A, если:

1) $P^k \cap A = \emptyset$;

2) $\rho(P^k, A) = 0$.

Афинная κ-мерная плоскость опорна к A в $x_0 \epsilon A$, если $x_0 \epsilon P^k$ и P^k можно включить в гиперплоскость, опорную к A в точке x_0.

Приведем без доказательства несколько лемм.

Лемма 1. Пусть K – телесный конус, A – ограниченное множество, тогда найдется такая точка e, что конус $K +$ е поглотит множество A, то есть $A \subset K + e$.

Лемма 2. Пусть K_1, K_2 – нормальные замкнутые конусы такие, что $K_1 \cap \{-K_2\} = 0$. Тогда найдутся нормальные телесные замкнутые конусы K_3, K_4, такие, что $K_1 \backslash \{0\} \subset intK_3$, $K_2 \backslash \{0\} \subset intK_4$ и $K_3 \cap \{-K_4\} = 0$.

Лемма 3. Пусть A – замкнутое выпуклое неограниченное множество, тогда:

1) внутренний конус замкнут, не зависит от точки;

2) A – цилиндр строго κ-го порядка тогда и только тогда, когда $K(A)$ – цилиндр строго κ-го порядка.

Лемма 4. Пусть A замкнутое выпуклое множество с нормальным внутренним конусом

$K(A)$, и $\rho(A,K)=\rho_0<\infty$, тогда произвольный телесный конус K^1, строго содержащий $K(A)$ (то есть $K(A)\backslash\{0\}\subset intK_1$), может поглотить A при помощи сдвига, то есть найдется точка e, такая, что $A\subset K_1+e$.

ТЕОРЕМА 1. A,B – замкнутые, выпуклые неограниченные подмножества R^m, $\Omega=A+B$. Пусть Ω незамкнуто, тогда:

1) $K(A)\cap\{-K(B)\}\neq 0$ и, следовательно, Ω является цилиндром с образующей содержащей $K(A)\cap\{-K(B)\}$;

2) при факторизации по R^k $(1\leq k\leq m-1)$ – максимальной цилиндрической образующей Ω хотя бы одно из множеств A_k,B_k незамкнуто, более того: $\overline{A}_k+\overline{B}_k\neq\Omega_k$ ($A_k+B_k=\Omega_k$).

Здесь π: $R^m\to R^m/R^k$, $A_k=\pi(A)$, $B_k=\pi(B)$, $\Omega=\Omega_k*R^k$, Ω_k – незамкнуто;

3) найдется асимптотная плоскость P_A^k у множества A (или P_B^k у B), найдется опорная или асимптотная плоскость P_B^k (или P_A^k) такие, что $P_A^k||P_B^k||R^k$,

$K(x_\infty,A_k)\cap\{-K_{y_\infty}(B_k)\}=0$, где $x_\infty=\pi(P_A^K)$, $y_\infty=\pi(P_B^K)$.

$K(x_\infty,A_k)$ – конус, порожденный множеством A_k и точкой x_∞.

$K_{x_\infty}(B_k)$ – внутренний конус множества B_k в точке x_∞.

Заметим, что из сказанного следует:

$x_\infty\,\epsilon\overline{A}_k\backslash A_k$, $y_\infty\ \epsilon\,\overline{B}_k$.

Доказательство. 1. Пусть $z_n\epsilon\,\Omega$, $z_n\to z_\infty\epsilon\,\overline{\Omega}\backslash\Omega$. Отсюда следует, что $z_n=z_n+y_n$, $\{z_n\}$ ограничена, $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ неограничены. Имеем $x_n=z_n-y_n$,

$||x_n||\leq||z_n||+||y_n||,\frac{||x_n||}{||y_n||}\leq\frac{M}{||y_n||}+1\to 1.$

Имеем $y_n=z_n-x_n$, $||y_n||\leq||z_n||+||x_n||$, $\frac{||y_n||}{||x_n||}\leq\frac{M}{||x_n||}+1\to 1$

Итак, мы доказали, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{||y_n||}{||x_n||}=1.$$

Рассмотрим $\widetilde{z_n}=x_n/||x_n||$, $\widetilde{y_n}=y_n/||y_n||$. Выделив сходящуюся подпоследовательность и перенумеровав, считаем, что: $\widetilde{x_n}\to\widetilde{x_\infty},\widetilde{y_n}\to\widetilde{y_\infty}$.

Рассмотрим $\cos\varphi_n=(\widetilde{x_n},\widetilde{y_n})=\frac{(x_n,y_n)}{||x_n||||y_n||}=-\frac{||x_n||}{||y_n||}+\frac{(x_n,z_n)}{||x_n||||y_n||}\to -1$, поэтому $\widetilde{x_\infty},=-\widetilde{y_\infty}$. Имеем $0\neq x_\infty\epsilon K(A)\cap\{-K(B)\}\Longrightarrow\Omega_k$ – цилиндр с образующей содержащей $K(A)\cap\{-K(B)\}$

2. Пусть Ω – цилиндр строго κ-го порядка с образующей R^k $(1\leq k\leq m-1)$. Рассмотрим π: $R^m=R^m/R^k$, получим $\Omega_k=\pi(\Omega)$, Ω_k незамкнуто, и Ω_k не цилиндр.

Если $\overline{A}_k+\overline{B}_k=\Omega_k$, а Ω_k незамкнуто, то по пункту 1 Ω_k – цилиндр. Получили противоречие. Итак, существуют $z_\infty\epsilon\,\overline{\Omega_k}\backslash\Omega_k$, $x_\infty\epsilon\bar{A}_k\backslash A_k$ (или $x_\infty\epsilon\bar{A}_k$), $y_\infty\epsilon\overline{B}_k$ (или $y_\infty\epsilon\overline{B}_k\backslash B_k$), такие, что $z_\infty=x_\infty+y_\infty$.

3. Обозначим $P_A^k=\pi^{-1}(x_\infty)$, $P_B^k=\pi^{-1}(y_\infty)$, поэтому P_A^k асимптотна к A и P_B^k асимптотна или опорна к B.

Если $K(x_\infty,A_K)\cap\{-K_{y_\infty}(B_K)\}=f\neq 0$, то незамкнутый луч $\{y_\infty-tf\colon t>0\}\subset B_K$ и существует $t^*>0$, такое, что

$x_\infty+t^*f=a\ \in a+\{y_\infty-tf\colon t>0\}\ \subset\Omega_K$.

Противоречие. Итак, мы доказали следующее: $K(x_\infty,A_K)\cap\{-K_{y_\infty}(B_K)\}=0$.

Следствие. K_1,K_2 – замкнутые конусы, $K_1\cap\{-K_2\}=0$, отсюда следует, что K_1+K_2 замкнуто.

Мы получили достаточные условия незамкнутости суммы двух выпуклых множеств, хотя бы одно из которых незамкнуто. Заметим, что сумма незамкнутых неограниченных выпуклых множеств может оказаться замкнутой.

Пример. Пусть A,B – подмножества R^2, такие, что: $A_1=\{(x,y)\colon y\geq x^2\}$, $A=A_1\backslash\{0\}$, $B=\{(x,y)\colon xy\geq 1,x\geq 0\}$.

Можно видеть, что множество Ω не является верхней полуплоскостью, а только ее частью, то есть множество Ω не цилиндр, и $\bar{A}+B\subset\Omega=>\bar{A}+B=\Omega$.

Если Ω незамкнуто, то по теореме 1 Ω – цилиндр. Противоречие, поэтому множество Ω замкнуто.

ТЕОРЕМА 2. Пусть A,B – выпуклые множества, A – незамкнуто. Если существуют такие $x_\infty\in\bar{A}\backslash A$, $y_\infty\in\bar{B}$, что $\overline{K}(x_\infty,A)\cap\{-K_{y_\infty}(\bar{B})\}=0$, то множество Ω незамкнуто.

Замечание. Поскольку множество B выпукло, то $\overline{K_{y_\infty}}(B)=K_{y_\infty}(\bar{B})=K(\bar{B})$, поэтому теорему 2 можно сформулировать так:

Пусть $x_\infty\in\bar{A}\backslash A$, $\overline{K}(x_\infty,A)\cap\{-K(\bar{B})\}=0$. Тогда множество Ω незамкнуто.

Предыдущая формулировка подчеркивает симметрию между теоремами 1 и 2.

Доказательство. Можно считать $0\in\bar{A}\backslash A$, $\overline{K}(0,A)\cap\{-\overline{K}(B)\}=0$. Обозначим $\overline{K}(0,A)=K_1$, $\overline{K}(B)=K_2$, $K_3=K_1+K_2$.

Пусть конусы K_1,K_2 – нормальны, по лемме 2 можно считать, что они телесные, а по лемме 4 можно считать, что $B\subset K_2$.

Рассмотрим $K_3=K_1+K_2$. Поскольку $K_1\cap\{-K_2\}=0$, то по теореме 1 конус K_3 замкнут и нормален.

Введем отношение порядка в R^m при помощи конуса K_3:

$x\geq y<=>x-y\in K_3,\ x>y<=>x\geq y$ и $x\neq y$. $A,\bar{B}\subset K_3$.

Множество $\bar{B}$ замкнуто, поэтому из теоремы о минимальном элементе [2] следует, что существует $y^*\in\bar{B}$ такой, что $y\geq y^*$ при всех $y\epsilon\bar{B}$. Тогда $0+y^*=y^*$. И точка y^* не принадлежит множеству Ω.

Действительно, если $y^*\in\Omega=>\exists x\in A,y\in B$ такие, что $x+y=y^*=>x=y^*-y$, $x\in A\subset K_3$, $x\neq 0=>y^*<y$.

Мы пришли к противоречию.

Но $0 \in \bar{A}$, $y^* \in \bar{B}$ $=>$ $y^* \in \Omega^*$, поэтому Ω незамкнуто.

Пусть K_1, K_2 – произвольные не обязательно нормальные конусы, то есть K_1, K_2 – цилиндры порядка n, k, поэтому $K_1 = \widetilde{K_1} \times R^n$, $K_2 = \widetilde{K_2} \times R^K$, где $\widetilde{K_1}, \widetilde{K_2}$ уже нормальны. По условию:

$K_1 \cap \{-K_2\} = 0 => \widetilde{K_1} \cap \{-\widetilde{K_2}\} = 0, R^n \cap R^K = 0.$

K_2 – внутренний конус $B => B = \tilde{B} \times R^K$.

Но совсем не обязательно, чтобы множество A было цилиндром, поэтому $\tilde{A} = A/R^K$ может оказаться замкнутым, и простая редукция к части 1 не проходит.

Рассмотрим $\tilde{A}_1 = \tilde{A} \backslash \{\tilde{0}\}$. Считаем, что $\tilde{A}, \tilde{B}$ кононически вложены в R^m. Применяя часть 1, получим, что существует $\tilde{y}^*$, минимальный в $\bar{\tilde{B}}$. Выберем представителя $y^* \epsilon \tilde{y}^*$.

Докажем, что y^* не принадлежит множеству Ω. Пусть $x \in A$, $y \in B$, $x + y = y^* => \tilde{x} + \widetilde{y} = \widetilde{y^*} => \tilde{x} = \tilde{0}, \tilde{y} = \widetilde{y^*} => x \in R^n$, $y^* - y \in R^k$, $R^n \cap R0^K = 0 => x = 0$.

Но точка 0 не принадлежит множеству A. Противоречие, и поскольку $y^* \in \bar{\Omega}$, то множество Ω незамкнуто. Теорема доказана.

Теперь легко собрать из теорем 1, 2 необходимые и достаточные условия замкнутости.

ТЕОРЕМА 3. Пусть множества *A, B* – выпуклы, замкнуты, $\Omega = A + B$.

Для замкнутости Ω необходимо выполнение одного из условий:

1) $intK(A) \cap \{-K(B)\} \neq \emptyset$ или $K(A) \cap \{-intK(B)\} \neq \emptyset$;

2) $K(A) \cap \{-K(B)\} = 0$;

3) пусть R^K – максимальная цилиндрическая образующая Ω; $\forall P_A^K$ – к-мерных асимптот A (или P_B^K асимптот множества B); $\forall P_B^K$ – к-мерных опорных или асимптотных плоскостей B (или P_A^K множества A) таких, что $P_A^K // P_B^K // R^K$ выполнялось $\bar{K}(x_\infty, A_K) \cap \{-\bar{K}_{y_\infty}(B_K)\} \neq 0$, $x_\infty = \pi(P_A^K)$, $A_K = \pi(A)$, $\pi: R^m \to R^m/R^K$.

Пункты 1–2 являются также и достаточными. Пункт 1 будет доказан в теореме 4. Пункты 2, 3 следуют из теорем 1, 2.

ТЕОРЕМА 4. Пусть *A, B* – выпуклые, замкнутые множества, $\Omega = A + B$. Для замкнутости Ω достаточно выполнения одного из следующих условий:

1) $intK(A) \cap \{-K(B)\} \neq \emptyset$ или $K(A) \cap \{-intK(B)\} \neq \emptyset$;

2) $K(A) \cap \{-K(B)\} = 0$;

3) пусть R^K – максимальная цилиндрическая образующая Ω; $\forall P_A^K$ – к-мерных асимптот A (или P_B^K-асимптот B); $\forall P_B^K$ –к-мерных опорных или асимптотных плоскостей B (или P_A^K множества A) таких, что $P_A^K // P_B^K // R^K$ выполнялось $K(x_\infty, A_K) \cap \{-K_{y_\infty}(B_K)\} \neq 0$, где $x_\infty = \pi(P_A^K)$, $y_\infty = \pi(P_B^K)$, $B_K = \pi(B)$, $\pi: R^m \to R^m/R^K$.

Пункты 1, 2 следуют из теорем 1, 2 в случае 1. $\Omega = R^m$, то есть Ω замкнуто.

Как следствие пункта 2 получим, что Ω замкнуто, если $K(A) = K(B)$. Действительно, если $K(A)$ нормален, то $K(A) = \cap \{-K(A)\} = 0$. А если $K(A)$ не нормален, то $K(A) = \widetilde{K}(\tilde{A}) \times R^n$, $A = \tilde{A} \times R^n$, $B = \tilde{B} \times R^n$, $\widetilde{K}(\tilde{A}) = \widetilde{K}(\tilde{B})$ и конус $\widetilde{K}(\tilde{A})$ уже нормален.

Список литературы

1. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М. : Наука, 1974.
2. Вулих Б. З. Введение в теорию конусов в нормированных пространствах. Калинин : Изд-во Калининского ун-та,1977.

Ссылка для цитирования:
Яксубаев К. Д., Кочергина Д. Д. Необходимые и достаточные условия замкнутости алгебраической суммы неограниченных замкнутых выпуклых множеств // Инженерно-строительный вестник Прикаспия : научно-технический журнал / Астраханский государственный архитектурно-строительный университет. Астрахань : ГАОУ АО ВО «АГАСУ», 2017. № 1 (19). С. 44–46.