УДК 517.955

ПРОВЕРКА РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССОЙ

К. Д. Яксубаев[*], *Д. Д. Кочергина*[**]

**Астраханский государственный архитектурно-строительный университет*
***Институт мировой экономики и финансов*
(Россия)

Проведена аналитическая проверка решения волнового уравнения с сосредоточенной массой.

Ключевые слова: *волновое уравнение, продольные колебания, сосредоточенная масса.*

Analytical verification of the solution of the wave equation with the lumped massis carried out

Keywords: *wave equation, longitudinal oscillations, lumped mass.*

В работе [1] получено аналитическое решение волнового уравнения продольных сейсмических колебаний земной коры и сооружения в виде сосредоточенной массы. В работе [2] была проведена численная проверка решения.

Но ввиду сложности задачи необходимо проверить решение прямым путем, путем подстановки точного решения в исходные уравнения.

Постановка задачи.

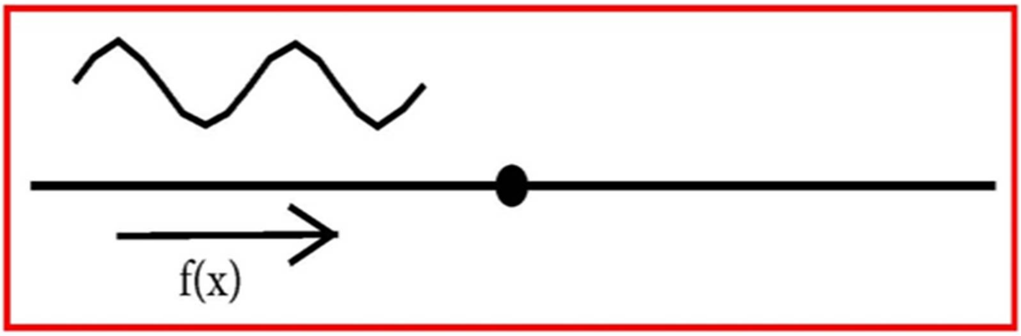

Рис. 1. Одномерная схема грунт-сооружение

В начале координат располагается сооружение массой M в виде сосредоточенной массы (Рис. 1). Грунт моделируется продольным стержнем.

Введем необходимые обозначения:

$U(x,t)$ − продольные отклонения точки x, в момент времени t;

t − время;

$\rho -$ объемная плотность грунта;
$S -$ поперечное сечение стержня;
$E -$ модуль упругости грунта;
$a = \sqrt{E/\rho}$ – скорость распрстранения продольной волны;
$\mu(t) -$ продольные смещения сооружения в форме материальной точки;
$\alpha = \frac{2ES}{a^2M} = \frac{2\rho S}{M} -$ экспоненциальная константа задачи.

Продольные смещения грунта представим в следующей форме:

$$U(x,t) = \begin{cases} U_1(x,t), & x < 0, \\ U_2(x,t), & x > 0 \end{cases}$$

Уравнения, описывающие продольные колебания земной коры таковы:

$$\begin{cases} U_{1tt} = a^2 U''_{1xx}, & x < 0, \ \ 0 \le t < \infty \\ U_{2tt} = a^2 U''_{2xx}, & x > 0, 0 \le t < \infty \end{cases} \quad (1)$$

Начальные условия таковы:

$$\begin{cases} U_1(x,0) = f(x), x < 0; \\ U_2(x,0) = 0, x \gg 0; \\ U_{1t}(x,0) = -af'(x), x < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Уравнение продольных колебаний сооружения таково:

$$M\mu''_{tt} = ES(U_{2x}(0,t) - U_{1x}(0,t)) \quad (3)$$

Условие сопряжения имеет вид:

$$U_1(0,t) = U_2(0,t) \quad (4)$$

Теорема. [1]. Система (1-5) имеет следующее решение:

$$\begin{cases} U_1(x,t) = f(x - at) + \psi(-x - at), & x < 0 \\ U_2(x,t) = \varphi(x - at), & x > 0 \end{cases} \quad (5)$$

где $\varphi(z)$ есть решение дифференциального уравнения второго порядка:

$$\varphi''(z) - \alpha\varphi'(z) = -\alpha f'(z), \varphi(0) = \varphi'(0) = 0, z < 0, \alpha = \frac{2ES}{a^2M} \quad (6)$$

А функция $\psi(z)$ имеет вид: $\psi(x) = \varphi(x) - f(x)$.

Лемма. [1,2]. Решение дифференциального уравнения (6) при нулевых начальных данных имеет вид:

$$\varphi(x) = \alpha \int_x^0 e^{\alpha(x-s)} f(s)ds \quad (7)$$

Предполагаем, что: функция $f(x)$

1) имеет ограниченную компактную область определения, вне которой она равна нулю.

2) функция $f(x)$ на неотрицательной части вещественной прямой равна нулю, то есть существуют отрицательные числа p, q такие что:

$$\begin{cases} f(x) \not\equiv 0, \text{при } x \in [p; q] \subset (-\infty; 0) \\ f(x) \equiv 0, \quad\quad \text{при } x \in [0; \infty). \end{cases}$$

Целью работы, является установление минимальной степени гладкости функции $f(x)$ для каждого пункта системы уравнений (1-6) для того, чтобы формула (7) давал точное поточечное решение рассматриваемой системы.

Начнем проверять функцию $\varphi(x)$. Получим при $z < 0$:

$$\varphi'(z) = \alpha\big(\varphi(z) - f(z)\big);$$
$$\varphi''(z) = \alpha\big(\varphi'(z) - f'(z)\big) = \alpha^2\varphi(z) - \alpha^2 f(z) - \alpha f'(z)$$

Получим:

$$\varphi(z) = \alpha \int_z^0 e^{\alpha(z-s)} f(s)ds;$$
$$\varphi'(z) = \alpha^2 \int_x^0 e^{\alpha(z-s)} f(s)ds - \alpha f(z);$$
$$\varphi''(z) = \alpha^3 \int_z^0 e^{\alpha(z-s)} f(s)ds - \alpha^2 f(z) - \alpha f'(z);$$
$$\varphi(z) = \varphi'(z) = \varphi''(z) = 0\,, z < 0.$$

Таким образом, если функция $f(z)$ непрерывно дифференцируема, то функция $\varphi(z)$ будет уже дважды непрерывно дифференцируемой функцией, то есть:

$$f(z) \in C^1(-\infty;\ \infty) \Rightarrow \varphi \epsilon C^2(-\infty;\ \infty).$$

Рассмотрим ту часть волны, которая прошла сквозь сооружение:

$$U_2(x,t) = \varphi(x - at), U_2(x,t) = 0 \text{ при } x - at \gg 0.$$

То есть, функция $\mathrm{U}_2(\mathrm{x},\mathrm{t})$ тоже будет принадлежать классу $\mathrm{C}^2(-\infty;\ \infty)$.

Проверяем решение $U_2(x,t) = \ \varphi(x - at);\ U_2(x,t) \equiv 0\,, x - at \gg 0$:

$$U''_{2xx}(x,t) = \varphi''_{\xi\xi}(x - at), U''_{2tt}(x,t) = a^2\varphi''_{\xi\xi}(x - at), \xi = x - at < 0$$

Получаем, что при любых значениях переменных $t, x \in [0; \infty)$ верно тождество:

$$U''_{2tt} \equiv a^2 U''_{2xx}$$

Нулевые начальные условия тоже удовлетворяются.

Отметим, что условия, налагаемые на функцию $f(z)$ можно ослабить. Можно требовать, чтобы первая производная функции $f(z)$ только существовала на всей числовой оси, но необязательно, чтобы она была непрерывной.

Проверяем функцию $U_1(x,t)$:

$$U_1(x,t) = f(x - at) + \varphi(-x - at) - f(-x - at), x < 0$$
$$U''_{1xx}(x,t) = f''_{\xi\xi}(x - at) + \varphi''_{\eta\eta}(-x - at) - f''_{\eta\eta}(-x - at), \eta = -x - at,$$

$$U''_{1tt}(x,t) = a^2\left(f''_{\xi\xi}(x-at) + \varphi''_{\xi\xi}(-x-at) - f''_{\eta\eta}(-x-at)\right).$$

Получаем, что при любых значениях переменных $t \in [0;\infty), x \in (-\infty;0]$ верно тождество:

$$U''_{1tt} \equiv a^2 U''_{1xx}$$

Для законности операции дифференцирования необходимо, чтобы в этом случае функция $f(z)$ была дважды дифференцируемой функцией. Причем необязательно, чтобы вторая производная была непрерывной функцией.

Проверим условие сопряжения. Имеем:

$$U_2(0,t) = \varphi(-at);\ U_1(0,t) = f(-at) + \varphi(-at) - f(-at) = \varphi(-at)$$

Получим: $U_2(0,t) \equiv U_1(0,t)$. Здесь достаточно того, чтобы функция $f(z)$ была просто непрерывной функцией.

Проверим уравнение колебания сооружения в форме материальной точки:

$$M\mu''_{tt} = ES(U_{2x}(0,t) - U_{1x}(0,t))$$

Лемма. Смещение сооружения будет равно:

$$\mu(t) = U_1(0,t) = U_2(0,t) = \varphi(-at).$$

Проверим выполнение уравнения колебания сооружения. Имеем:

$$\mu(t) = U_1(0,t) = U_2(0,t) = \varphi(-at);\ \mu''(t) = a^2\varphi''_{\xi\xi}(-at)$$

В этом пункте достаточно, того, чтобы функция $f(z)$имела первую производную, причем необязательно непрерывную. Получим при $x > 0$:

$$U_2(x,t) = \varphi(x-at) \Rightarrow U'_{2x}(x,t) = \varphi'_{\xi}(x-at);$$

$$U_1(x,t) = f(x-at) + \varphi(-x-at) - f(-x-at);$$

$$U'_{1x}(x,t) = f'_{\xi}(x-at) - \varphi'_{\eta}(-x-at) + f'_{\eta}(-x-at);$$

$$ES(U_{2x}(0,t) - U_{1x}(0,t)) = ES\left(\varphi'_{\xi}(-at) - f'_{\xi}(-at) + \varphi'_{\eta}(-at) - f'_{\eta}(-at)\right)$$

$$ES(U_{2x}(0,t) - U_{1x}(0,t)) = 2ES\left(\varphi'(-at) - f'_{\xi}(-at)\right);$$

$$M\mu''(t) = Ma^2\varphi''_{\xi\xi}(-at) = 2ES\left(\varphi'(-at) - f'_{\xi}(-at)\right);$$

$$\varphi''_{\xi\xi}(-at) = \alpha\left(\varphi'_{\xi}(-at) - f'_{\xi}(-at)\right) \Rightarrow \varphi''_{\xi\xi}(\xi) = \alpha\left(\varphi'_{\xi}(\xi) - f'_{\xi}(\xi)\right)$$

В этом пункте для законности операции дифференцирования достаточно, чтобы функция $f(z)$ имела первую производную, причем необязательно непрерывную.

Итоги. Для того, чтобы формула (7) давала точное поточечное решение почти всех уравнений системы уравнений (1–6) достаточно, чтобы функция $f(x)$ имела первую производную, причем необязательно непрерывную. И только для выполнения одного уравнения системы, а именно уравнения

$$U''_{1tt} \equiv a^2 U''_{1xx}$$

необходимо, чтобы функция $f(x)$ имела вторую производную, причем необязательно непрерывную.

Список литературы

1. Будак В. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. М. : Наука, 1972 г. 687 с.

2. Яксубаев К. Д. Волновое уравнение сейсмических продольных колебаний грунта и сооружения в виде точечной вставки // Перспективы развития строительного комплекса. Астрахань : АГАСУ. 2017. С. 245–249.

УДК 621.314

MODELING OF MAGNETIC CIRCUITS OF ELECTROMAGNETIC TRANSDUCERS OF THE THREE-PHASES CURRENT

Siddikov Ilkhomjon Khakimovich*, Sattarov Khurshid Abdishukurovich*, Khujamatov Khalimjon*, Xonturaev Ikrom*, Maksudov Moxirbek*, Najmatdinov Kunbonbek**, Abubakirov Azizjan**, Bojanic Slobodan***

**Tashkent University of Information Technology (Uzbekistan)*

***Karakalpak State University (Uzbekistan)*

****Polytechnic University of Madrid (Spain)*

В статье приведена модель нового электромагнитного сигнального преобразователя величины реактивной мощности электроэнергии, учитывающего особенности тока трехфазных сетей, отличающихся друг от друга величиной и фазами.

Ключевые слова: *трехфазный ток, электрические сети, электромагнитные преобразователи, реактивный компонент тока.*

There are given model of new electromagnetic signal transducer of the value of reactive power of electricity, to account the features of the current of three-phases nets, which differ from each other's in value and phases in the paper.

Key words: *three-phase current, electrical networks, electromagnetic converters, reactive current component.*

During monitoring and controlling of the processes of transmission and distribution electricity and power from three-phases nets are important accuracy and commonality primary transducer elements and devices. Incorrect operations and improper signals about conversion of primary values and parameters of the energy and power three-phases current associated with losses indicators of energy and resource in electrical power systems.

Classical single-phase current transformers using currently in electrical nets for monitoring and control values and parameters of the reactive component of electric energy and power, do not take for account of mutual influence of magnetic flux fields generated by currents of three-phases power supply systems. They do not provide necessary accuracy, especially when three-phases primary current have unbalance, do not have sufficient community, covering only sizes and parameters of the electric and magnetic circuits, because distribution of the magnetic signal conversion systems have nonlinearity and heterogeneous distributed parameters [1].

Research dates of the classic single-phase primary electromagnetic transducers not provided enough accurate and simultaneous information on the values and parameters of reactive electric energy and power of three-phases nets. On the determining above, become necessary to develop a new electromagnetic signal transducer of the value of reactive power of electricity, to account the features of the current of three-phases nets, which differ from each other's in value and phases [2].