

УДК 539.3

**О НОРМАЛЬНОМ УДАРЕ КОНУСОМ ПО ГИБКОЙ УПРУГОЙ МЕМБРАНЕ**

*В. А. Абдалин, К. Д. Яксубаев*

*Национальный университет Узбекистана,  
Астраханский государственный  
архитектурно-строительный университет  
(г. Астрахань, Россия)*

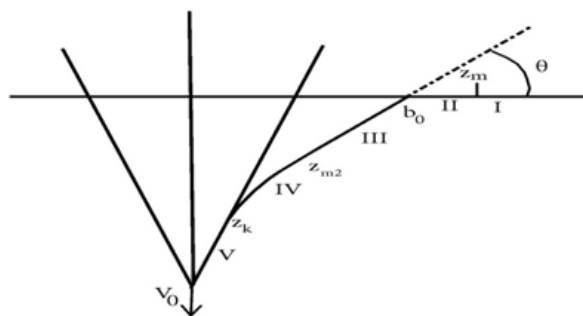
Задача о нормальном ударе конусом по мембране является актуальной задачей механики деформируемых тел в связи с развитием современной техники. Выведена система дифференциальных уравнений, адекватно описывающая механику такого удара.

*Ключевые слова:* удар, конус, мембрана, механика, дифференциальные уравнения.

The problem of the normal cone impact on the membrane is an urgent problem of mechanics of deformable bodies in connection with the development of modern technology. A system of differential equations adequately describing the mechanics of such a shock is derived.

*Keywords:* impact, cone, membrane, mechanics, differential equations.

Постановка задачи [1-5]. Пусть абсолютно твёрдый полубесконечный конус движется в направлении своей оси с постоянной скоростью  $V_0$  (рис.).



*Рис. Нормальный удар конусом по мембране*

Основные предположения:

1. Мембрана однородна, изотропна, толщина её постоянна, начальные напряжения и деформации равны нулю.
2. Вектор скорости конуса  $V_0$  постоянен в процессе удара и нормален к начальной плоскости мембраны.
3. Скорость набегания образующей конуса на мембрану не превышает скорости распространения волны излома  $b_0$  (рис.1).

В данной работе предлагается следующая схема решения задачи. Вся область движения делится на 5 областей:

I. Область чисто горизонтального продольного движения мембраны с положительными радиальными и кольцевыми напряжениями:

$z_m$  – фронт возникновения радиальных морщин, ( $\sigma_\varphi = 0$ ), где  $\sigma_\varphi$  – кольцевое напряжение;

II. Область чисто горизонтального продольного движения мембраны с положительными радиальными и нулевыми кольцевыми напряжениями (область радиальных морщин);

III. Область горизонтально-вертикального продольно-поперечного движения мембраны с положительными радиальными и нулевыми кольцевыми напряжениями (область радиальных морщин);

IV. Область горизонтально-вертикального продольно-поперечного движения мембраны с положительными радиальными и кольцевыми напряжениями;

V. Область движения по конусу.

Уравнения движения в области I:

$$\left\{ \begin{array}{l|l} \text{Уравнения} & \text{Решение} \\ \frac{d\varepsilon_\tau}{dz} = -\frac{\varepsilon_\tau - \varepsilon_\varphi}{z(1-z^2)} & \varepsilon_\tau = c_1 \left( \ln \frac{1 + \sqrt{1-z^2}}{z} + \frac{\sqrt{1-z^2}}{z^2} \right) \\ \frac{d\varepsilon_\varphi}{dz} = \frac{\varepsilon_\tau - \varepsilon_\varphi}{z} & \varepsilon_\varphi = c_1 \left( \ln \frac{1 + \sqrt{1-z^2}}{z} - \frac{\sqrt{1-z^2}}{z^2} \right) \\ \frac{d\theta}{dz} = 0 & \theta = 0 \\ \frac{du_\tau}{dz} = a_0 \frac{\varepsilon_\tau - \varepsilon_\varphi}{1-z^2} & u_\tau = 2a_0 c_1 \frac{\sqrt{1-z^2}}{z} \\ \frac{du_n}{dz} = 0 & u_n = 0 \\ & c_1 > 0 \end{array} \right.$$

где  $\varepsilon_\tau$  – продольная деформация,  $\varepsilon_\varphi$  – кольцевая деформация,  $z$  – автомодельная переменная  $z = \frac{r}{a_0 t}$ ; где  $r$  – начальная координата точки мембраны,  $a_0^2 = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\sigma_\tau}{d\varepsilon_\tau}$  – скорость продольной волны, (в упругом случае  $a_0^2 = \frac{E}{\rho_0(1-\vartheta^2)}$ , где  $E$  – модуль Юнга,  $\vartheta$  – коэффициент Пуассона),  $\theta$  – угол между касательной к мембране и положительным направлением оси  $Or$  (см. рис.1),  $u_\tau, u_n$  – проекции вектора скорости частицы  $\bar{U}$  на касательную и нормаль к мембране соответственно.

Уравнения движения в области II:

$$\left\{ \begin{array}{l|l} \text{Уравнения} & \text{Решение} \\ \frac{d\varepsilon_\tau}{dz} = -\frac{(1-\nu^2)\varepsilon_\tau}{z(1-\nu^2-z^2)} & \varepsilon_\tau = c_2 \frac{\sqrt{1-\nu^2-z^2}}{z} \\ \frac{d\varepsilon_\varphi}{dz} = \frac{\varepsilon_\tau - \varepsilon_\varphi}{z} & \varepsilon_\varphi = c_2 \left( \frac{\varepsilon_\tau}{c_2} - \frac{\sqrt{1-\nu^2}}{z} \ln \left( \frac{\sqrt{1-\nu^2}}{z} + \frac{\varepsilon_\tau}{c_2} \right) \right) + \frac{c_3}{z} \\ \frac{d\theta}{dz} = 0 & \theta = 0 \\ \frac{du_\tau}{dz} = \frac{a_0 \varepsilon_\tau (1-\nu^2)}{1-\nu^2-z^2} & u_\tau = -c_2 \operatorname{Ln} \frac{\sqrt{1-\nu^2} + \sqrt{1-\nu^2-z^2}}{z} + c_4 \\ \frac{du_n}{dz} = 0 & u_n = 0 \\ & c_1 \Rightarrow (c_2; c_3; c_4) \end{array} \right.$$

Константы  $c_2, c_3, c_4$  определяются через константу  $c_1$ .

Уравнения движения в области III:

$$\left\{ \begin{array}{l|l} \text{Уравнения} & \text{Решение} \\ \frac{d\varepsilon_\tau}{dz} = -\frac{(1-\vartheta^2)\varepsilon_\tau}{z(1-\vartheta^2-z^2)} & \varepsilon_\tau = c_2 \frac{\sqrt{1-\vartheta^2-z^2}}{z} \\ \frac{d\varepsilon_\varphi}{dz} = \frac{(1+\varepsilon_\tau) \cos \theta - 1 - \varepsilon_\varphi}{z} & D = \frac{\varepsilon_\tau}{c_2} - \frac{\sqrt{1-\vartheta^2}}{z} \operatorname{Ln} \left( \frac{\sqrt{1-\vartheta^2}}{z} + \frac{\varepsilon_\tau}{c_2} \right) \\ c_5, c_6 = \text{const} & \varepsilon_\varphi = c_2 \cos(\alpha) D + \cos(\alpha) - 1 + \frac{c_5}{z} \\ \frac{d\theta}{dz} = 0 & \theta = \alpha = \text{const} \\ \frac{du_\tau}{dz} = \frac{a_0 \varepsilon_\tau (1-\vartheta^2)}{1-\vartheta^2-z^2} & u_\tau = -c_2 \operatorname{Ln} \left( \frac{\sqrt{1-\vartheta^2}}{z} + \frac{\varepsilon_\tau}{c_2} \right) + c_6 \\ \frac{du_n}{dz} = 0 & u_n = -b_0 (1 + \varepsilon_\varphi(b_0)) \sin(\alpha) = \text{const} \end{array} \right.$$

Уравнения движения в области IV:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\varepsilon_\tau}{dz} = -\frac{\varepsilon_\tau - \vartheta + (\vartheta - \varepsilon_\tau) \cos(\theta)}{z(1-z^2)} \\ \frac{d\varepsilon_\varphi}{dz} = \frac{(1 + \varepsilon_\tau) \cos \theta - 1 - \varepsilon_\varphi}{z} \\ \frac{d\theta}{dz} = -\frac{(\varepsilon_\varphi + \vartheta \varepsilon_\tau) \sin(\theta)}{(1 + \varepsilon_\tau)(\varepsilon_\tau + \vartheta \varepsilon_\varphi - z^2)z} \\ \frac{du_\tau}{dz} - u_n \frac{d\theta}{dz} = -a_0 z \frac{d\varepsilon_\tau}{dz} \\ \frac{du_n}{dz} + u_\tau \frac{d\theta}{dz} = -a_0 z (1 + \varepsilon_\tau) \frac{d\theta}{dz} \end{array} \right.$$

Граничными условиями на границах области IV в точках  $z_{m2}$  и  $z_k$  (см. рис. 1) являются непрерывности переменных:  $\varepsilon_\tau, \varepsilon_\varphi, \theta, u_\tau, u_n$ .

Решение задачи в области V (область облегания конуса):

$$\begin{cases} \varepsilon_\tau = c_2 \tau_2 + \frac{(1+\vartheta)(1-d)}{c-\lambda d} - 1 \\ \varepsilon_\varphi = \lambda c_2 \frac{\tau_1}{z} + \frac{\lambda(1+\vartheta)(1-d)}{c-\lambda d} - 1 \\ \theta = \alpha; u_\tau = a_0 c_2 \tau_3; u_n = 0 \\ \tau_1 = z^{2p+1} F_1 \\ \tau_2 = (2p+1)z^{2p} \left( F_1 + \frac{2p}{3+c+4p} z^2 F_2 \right) \\ \tau_3 = -pz^{2p+1} \left( 2F_1 + \frac{2(2p+1)}{3+c} z^2 F_2 \right) \\ F_1 = F \left( p, p + \frac{1}{2}, \frac{3+c}{2} + 2p, z^2 \right) \\ F_2 = F \left( p+1, p + \frac{3}{2}, \frac{5+c}{2} + 2p, z^2 \right) \end{cases}$$

Здесь

$$F(a, b, c, x) = 1 + \frac{ab}{1!c} x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)} x^2 + \dots - ,$$

где  $F(a, b, c, x)$  – гипергеометрический ряд;

$$c = 1 - k\vartheta\sqrt{1-\lambda^2}, \quad d = \lambda + k\sqrt{1-\lambda^2},$$

$$p = \frac{-(c+1) + \sqrt{(c-1)^2 + 4\lambda}}{4}; \quad -\frac{1}{2} < p < \frac{1}{2}; \quad \lambda = \cos(\theta) \text{ (на конусе);}$$

$k$  – коэффициент трения,  $\nu$  – коэффициент Пуассона. Данная нелинейная граничная задача решается методом стрельбы. Подгоночный параметр –  $z_k$ .

#### Список литературы

1. Х. А. Рахматулин, Ю.А. Демьянов. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках – 2-е изд., доп.- М.: Университетская книга; Логос, 2009.
2. А.Л. Павленко Автореферат канд. дисс. МГУ, 1952.
3. В. Ф. Максимов, Л. А. Оснач Нормальный удар конусом по тонкой пластине с трением // Газовая и волновая динамика. Вып. 3. М. Изд-во МГУ, 1979.
4. С.С. Григорян, Б.В. Куксенко О возможности существования фронтов появления и исчезновения морщин на мембране при ударе по ней конусом. // Газовая и волновая динамика. Вып 2.М.: Изд-во Московского Университета, 1979.
5. В.А. Абдалиев Численное решение задачи о нормальном ударе конусом по гибкой мембране. Международная конференция «Современные проблемы газовой и волновой динамики», Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, 21-23 апреля 2009 г. М. 2009.

УДК. 528.48

## ЖИВОЙ СНИП ДЛЯ ПЕРЕХОДНОЙ КРИВОЙ

**К. Д. Яксубаев, С. Н. Меньшикова**

*Астраханский государственный  
архитектурно-строительный университет  
(г. Астрахань, Россия)*

Новым направлением в проектировании является проектирование с помощью живых СНИПов, СНИПов реализованных в математическом пакете. В работе строится живой СНИП в пакете Mathcad для построения переходных кривых сопрягающих две окружности между собой.

**Ключевые слова:** живой, СНИП, клотоида, переходная кривая.

A new direction in the design is the design with the help of live Snips, Snips implemented in the mathematical step. In this paper we construct a live SNIp in the package Mathcad to build transition curves conjugating two circles together.

**Keyword:** live, SNIp, clothoid, transition.

Постановка задачи. Даны две автомобильные трассы: входящая и выходящая в форме непересекающихся окружностей. Автомобилю необходимо перейти с входящей трассы на выходящую трассу. Для перехода необходимо построить переходной путь с плавно изменяющейся кривизной. В таблице приведем систему обозначений.

Алгоритм построения переходной кривой. Сначала проводятся крест – накрест две касательные прямые общие для двух окружностей (рис. 1). Затем при въезде на каждую касательную и съезде с нее вшивается клотоида для обеспечения гладкости кривизны всей переходной трассы.

Найдем из подобия треугольников точку пересечения касательных -Z:

$$Z = \frac{R_1 r_2 + R_2 r_1}{R_1 + R_2}$$