

**ФИЛЬТРАЦИЯ СУСПЕНЗИИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С ДВУМЯ ТИПАМИ ФУНКЦИИ КОНЦЕНТРАЦИИ****Г. Л. Сафина, Э. Р. Рахматуллина**

**Сафина Галина Леонидовна**, кандидат технических наук, доцент, заведующая кафедрой фундаментального образования, Филиал Национального исследовательского Московского государственного строительного университета (НИУ МГСУ) в г. Мытищи, г. Москва, Российская Федерация, e-mail: minkinag@mail.ru;

**Рахматуллина Эльвина Ринатовна**, студентка, Филиал Национального исследовательского Московского государственного строительного университета (НИУ МГСУ) в г. Мытищи, г. Москва, Российская Федерация

Сохранение и восстановление старинных архитектурных построек является неотъемлемой частью деятельности современного человечества. Под воздействием природных и техногенных факторов фундаменты исторических зданий разрушаются. Это может привести к их полному исчезновению. Метод струйной цементации грунтов зарекомендовал себя как один из самых надежных и эффективных способов укрепления почв и оснований зданий. Укрепитель впрыскивается в пористый грунт, тем самым взвешенные твердые частицы образуют осадок. В работе рассматривается модель долговременной глубинной фильтрации суспензии с линейной и нелинейной функцией, которые соответствуют двум различным механизмам захвата твердых частиц. Поставленная задача не имеет точного решения при нелинейной функции фильтрации, поэтому решается численно с помощью метода конечных разностных схем. Кроме этого, построены асимптотики концентраций взвешенных и осажденных частиц вблизи фронта концентраций, дающие хорошее приближение к численным решениям в достаточно большом временном интервале.

**Ключевые слова:** фильтрация суспензии, взвешенные и осажденные частицы, пористая среда, функция фильтрации, функция концентрации, асимптотика.

**SUSPENSION FILTRATION IN A POROUS MEDIUM WITH TWO TYPES OF CONCENTRATION FUNCTION****G. L. Safina, E. R. Rakhmatullina**

**Safina Galina Leonidovna**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Fundamental Education, Branch of the National Research Moscow State University of Civil Engineering (NRU MGSU) in Mytishchi, Moscow, Russian Federation, e-mail: minkinag@mail.ru;

**Rakhmatullina Elvina Rinatovna**, student, Branch of the National Research Moscow State University of Civil Engineering (NRU MGSU) in Mytishchi, Moscow, Russian Federation

Preservation and restoration of ancient architectural buildings is an integral part of the modern humanity activities. Under the influence of natural and man-made factors, the foundations of historical buildings are destroyed, this can lead to their complete disappearance. The method «jet grouting» is one of the most reliable and effective methods of strengthening soils and building foundations. The grout is injected into the porous soil, thereby the suspended solids form a deposit. The paper considers a model of deep bed filtration of a suspension with a linear and nonlinear filtration functions, which correspond to two different mechanisms of capture of solid particles. The problem does not have an exact solution with a nonlinear filtering function, so it is solved numerically using the finite difference scheme method. In addition, the asymptotics of suspended and retained particle concentrations are constructed. They give a good approximation to numerical solutions in sufficiently large time interval.

**Keywords:** suspension filtration, suspended and retained particles, porous medium, filtration function, concentration function, asymptotic.

**Введение**

Цель исследования – изучение одномерной задачи глубинной фильтрации суспензии в пористой среде.

**Задачи исследования**

Рассматриваемая математическая модель задачи состоит из двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка: баланса масс взвешенных и осажденных частиц; образования осадка. Уравнение роста осадка определяется функциями концентрации и фильтрации. Функция концентрации описывает механизм захвата частиц. В работе рассмотрены два типа функции фильтрации: линейная и кубическая. Линейная функция описывает механико-геометрический механизм захвата частиц: поры блокируются твердыми частицами, чьи размеры больше диаметра горловин пор. Нелинейная

определяет сочетание механико-геометрического захвата частиц и образование арочных перекрытий, состоящих из трех частиц.

**Актуальность исследования**

Фильтрация жидкости в пористой среде определяет эффективность методов укрепления грунтов и фундаментов зданий.

**Научная новизна и методы исследования**

В работе впервые рассматривается процесс фильтрации с нелинейными функциями. Поставленная задача не имеет точного решения, поэтому используются конечно-разностные численные методы, а также метод асимптотического анализа. С помощью рекуррентной системы уравнений получены аналитические выражения основных асимптотических членов.

Исторические постройки являются неотъемлемой частью всемирного культурного наследия. Они отражают траекторию развития

страны и являются продуктом древней истории, культуры, искусства и религии. Человечество нуждается в истории и культуре и именно посредством исторических памятников оно соприкасается и с тем, и с другим. Благодаря защите и восстановлению исторических зданий человек может дополнять культурное наследие своей страны, зафиксировать историю, обеспечивать свою самобытность.

В большинстве случаев возраст зданий, имеющих архитектурную ценность, превышает 100 лет. За многолетний срок службы основания памятников оказываются под угрозой разрушения из-за возросших нагрузок и вибраций, с течением времени меняется структура грунтов. Особое воздействие оказывает вода, проникающая в грунты различными путями (прорыв канализации, повышение уровня грунтовых вод). Для предотвращения потери исторических ценностей и памятников культуры необходимо усиливать грунты под ними, что уменьшит риск возникновения деформаций и разрушений.

Начиная с 1970-х годов в работах по эффективному укреплению грунтов и усилению фундаментов начинает использоваться технология jet grouting [1–3], которая в настоящее время является одной из самых востребованных в этой области. Раствор, раствор с воздухом или раствор с воздухом и водой впрыскиваются в грунт через сопла небольшого диаметра, размещенные в трубе для раствора, опущенной в скважину. Труба непрерывно вращается с постоянной скоростью и медленно поднимается к поверхности земли. Струя распространяется радиально от оси скважины, и через некоторое время закачаный раствор затвердевает, образуя тело из цементированного грунта квазицилиндрической формы (струйный столб).

Фильтрация суспензии, протекающей через пористую среду с учетом осаждения твердых частиц на пористом каркасе и постепенного уменьшения пористости и проницаемости среды, представляет огромный интерес в jet grouting. Фильтрация суспензии делится на две группы: внешняя осадочная корка и долговременная глубинная [4]. Первый тип фильтрации заключается в осаждении частиц на входе пористой среды. Он характерен для суспензий с крупными частицами и высокой концентрацией. Второй связан с образованием осадка во всей пористой среде, если малые взвешенные частицы суспензии с низкой концентрацией могут беспрепятственно переноситься по порам. В случае, когда суспензия имеет частицы разного размера, эти два типа фильтрации используются одновременно. Мы будем рассматривать долговременную глубинную фильтрацию.

Существуют различные механизмы захвата частиц в пористой среде: размерный механизм,

электрические силы (Лондон – Ван-дер-Ваальс, двойной электрический слой и др.), гравитационная сегрегация, образование арочных перемычек группой частиц и т. д. В данной работе рассматривается размерный механизм захвата частиц: крупные частицы захватываются маленькими порами, закупоривая их, и беспрепятственно проходят через большие поры [5–7] и смешанный механизм, который включает в себя механико-геометрический и образование арочных перемычек несколькими частицами.

В классической модели долговременной глубинной фильтрации система дифференциальных уравнений в частных производных состоит из уравнения баланса масс взвешенных и осажденных частиц и кинетического уравнения образования осадка. Для некоторого класса одномерных задач найдено точное решение [8–10], для других возможно получить только асимптотическое [11–13]. Для широкого класса задач найдено решение численными методами [14–16].

#### Математическая модель задачи

Рассмотрим классическую модель глубинной фильтрации в области  $\Omega = \{0 \leq x \leq 1, t \geq 0\}$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \Lambda(S)F(C) \quad (2)$$

с краевым условием

$$x = 0: C(0, t) = 1 \quad (3)$$

и начальными условиями

$$t = 0: C(x, 0) = 0; S(x, 0) = 0. \quad (4)$$

Здесь  $C(x, t)$  – концентрация взвешенных частиц,  $S(x, t)$  – концентрация осажденных частиц,  $\Lambda(S)$  – функция фильтрации,  $F(C)$  – функция концентрации.

Прямая  $t = x$  задает фронт концентраций взвешенных и осажденных частиц. В области  $\Omega^{(1)} = \{0 < x < 1, 0 < t < x\}$ , расположенной ниже этой прямой, концентрации  $C(x, t)$  и  $S(x, t)$  нулевые. В области  $\Omega^{(2)} = \{0 < x < 1, t > x\}$  концентрации  $C(x, t)$  и  $S(x, t)$  принимают положительные значения. Решение  $C(x, t)$  имеет разрыв вдоль фронта, решение  $S(x, t)$  всюду непрерывно и равно нулю на фронте концентраций.

В данной работе в качестве функции фильтрации будем рассматривать кубическую функцию общего вида

$$\Lambda(S) = \lambda_0 + \lambda_1 S + \lambda_2 S^2 + \lambda_3 S^3,$$

которая является убывающей до нуля, т. е. существует такое значение  $\tilde{S}$ , что  $\lambda_0 + \lambda_1 \tilde{S} + \lambda_2 \tilde{S}^2 + \lambda_3 \tilde{S}^3 \equiv 0$ . Конкретный вид

функции фильтрации, используемый в наших расчетах, определен экспериментально.

Система (1)–(2) приобретает вид

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x} + (\lambda_0 + \lambda_1 S + \lambda_2 S^2 + \lambda_3 S^3) F(C) = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = (\lambda_0 + \lambda_1 S + \lambda_2 S^2 + \lambda_3 S^3) F(C) \quad (6)$$

с граничным и начальным условиями (3)–(4).

Переходя в уравнении (5) к характеристическим переменным  $\tau = t - x$ ,  $x = x$ , получим

$$\frac{\partial C}{\partial x} + (\lambda_0 + \lambda_1 S + \lambda_2 S^2 + \lambda_3 S^3) F(C) = 0.$$

Найдем решение  $C(x, \tau)$  при  $\tau = 0$ , что соответствует линии фронта концентраций  $t = x$ . Учитывая, что на фронте концентраций решение  $S(x, t)$  нулевое, получим

$$\frac{\partial C}{\partial x} + \lambda_0 F(C) = 0.$$

Будем рассматривать функции концентрации вида  $F(C) = C$  и  $F(C) = (1 - \alpha)C + \alpha C^3$ , которые соответствуют размерному и смешанному захвату частиц. Для линейной функции  $F(C) = C$  получим

$$\frac{\partial C}{\partial x} = -\lambda_0 C.$$

Учитывая условие (3), имеем

$$\int_{C_0(x)}^1 \frac{dc}{C} = \lambda_0 x,$$

откуда решение  $C_0(x)$  задается формулой

$$C_0(x) = e^{-\lambda_0 x}. \quad (7)$$

Для нелинейной функции  $F(C) = (1 - \alpha)C + \alpha C^3$  получим

$$\int_{C_0(x)}^1 \frac{dc}{(1 - \alpha)C + \alpha C^3} = \lambda_0 x,$$

$$(t - x)^0: C'_0(x) = -\lambda_0 C_0(x), S_1(x) = \lambda_0 C_0(x);$$

$$(t - x)^1: C'_1(x) = -\lambda_0 C_1(x) - \lambda_1 S_1(x) C_0(x), S_2(x) = \lambda_0 C_1(x) + \lambda_1 C_0(x) S_1(x);$$

$$(t - x)^2: \frac{1}{2} C'_2(x) = -\frac{1}{2} \lambda_0 C_2(x) - \lambda_1 C_1(x) S_1(x) - \frac{1}{2} \lambda_1 C_0(x) S_2(x) - \lambda_2 C_0(x) S_1^2(x)$$

$$\frac{1}{2} S_3(x) = \frac{1}{2} \lambda_0 C_2(x) + \lambda_1 C_1(x) S_1(x) + \frac{1}{2} \lambda_1 C_0(x) S_2(x) + \lambda_2 C_0(x) S_1^2(x).$$

Решая данную систему уравнений, получим:

$$C_0(x) = e^{-\lambda_0 x}, S_1(x) = \lambda_0 e^{-\lambda_0 x};$$

$$C_1(x) = \lambda_1 e^{-\lambda_0 x} (e^{-\lambda_0 x} - 1), S_2(x) = \lambda_0 \lambda_1 e^{-\lambda_0 x} (2e^{-\lambda_0 x} - 1);$$

$$C_2 = e^{-\lambda_0 x} ((2\lambda_1^2 + \lambda_0 \lambda_2) e^{-2\lambda_0 x} - 3\lambda_1^2 e^{-\lambda_0 x} + (\lambda_1^2 - 2\lambda_0 \lambda_2)),$$

$$S_3(x) = \lambda_0 e^{-\lambda_0 x} (3(2\lambda_1^2 + \lambda_0 \lambda_2) e^{-2\lambda_0 x} - 6\lambda_1^2 e^{-\lambda_0 x} + \lambda_1^2 - 2\lambda_0 \lambda_2).$$

тогда

$$C_0(x) = \frac{\sqrt{1 - \alpha e^{-(1-\alpha)\lambda_0 x}}}{\sqrt{1 - \alpha e^{-2(1-\alpha)\lambda_0 x}}}. \quad (8)$$

На входе фильтра при  $x = 0$  с учетом краевого условия (3) решение  $S_0(0, t)$  определяется из уравнения (6):

$$\frac{\partial S}{\partial t} = (\lambda_0 + \lambda_1 S + \lambda_2 S^2 + \lambda_3 S^3),$$

откуда

$$\int_0^{S(0,t)} \frac{dS}{\lambda_0 + \lambda_1 S + \lambda_2 S^2 + \lambda_3 S^3} = t. \quad (9)$$

**Асимптотическое решение вблизи фронта концентраций**

а) *Линейная функция концентрации  $F(C) = C$*

Для линейной функции концентрации  $F(C) = C$  будем искать асимптотические решения вблизи фронта концентраций  $t = x$  в виде:

$$C(x, t) = C_0(x) + C_1(x)(t - x) + \frac{1}{2} C_2(x)(t - x)^2 + \dots; \quad (10)$$

$$S(x, t) = S_1(x)(t - x) + \frac{1}{2} S_2(x)(t - x)^2 + \frac{1}{6} S_3(x)(t - x)^3 + \dots, \quad (11)$$

ограничиваясь в обоих решениях первыми тремя слагаемыми в силу громоздких вычислений. Первый член асимптотики взвешенных частиц  $C_0(x)$  определяется формулой (7),  $S_0(x) = 0$ , поскольку на фронте концентраций концентрация осажденных частиц нулевая.

Дифференцируем разложение (10) по  $x$  и  $t$ , разложение (11) – по  $t$ , подставляем в систему уравнений (5)–(6). Группируя слагаемые при одинаковых степенях  $(t - x)$ , приравняем их к нулю и получаем систему уравнений:

Заметим, что первое решение полученной системы совпадает с решением (7).

Подставляем полученные решения в (10)–(11), получаем асимптотические разложения:

$$C(x, t) = e^{-\lambda_0 x} + \lambda_1 e^{-\lambda_0 x} (e^{-\lambda_0 x} - 1)(t - x) + \frac{1}{2} e^{-\lambda_0 x} \left( (2\lambda_1^2 + \lambda_0 \lambda_2) e^{-2\lambda_0 x} - 3\lambda_1^2 e^{-\lambda_0 x} + (\lambda_1^2 - 2\lambda_0 \lambda_2) \right) (t - x)^2 + \dots,$$

$$S(x, t) = \lambda_0 e^{-\lambda_0 x} (t - x) + \frac{1}{2} \lambda_0 \lambda_1 e^{-\lambda_0 x} (2e^{-\lambda_0 x} - 1)(t - x)^2 + \frac{1}{6} \lambda_0 e^{-\lambda_0 x} (3(2\lambda_1^2 + \lambda_0 \lambda_2) e^{-2\lambda_0 x} - 6\lambda_1^2 e^{-\lambda_0 x} + \lambda_1^2 - 2\lambda_0 \lambda_2) (t - x)^3 + \dots$$

б) *Нелинейная функция концентрации*  
 $F(C) = (1 - \alpha)C + \alpha C^3.$

$$S(x, t) = S_1(x)(t - x) + \frac{1}{2} S_2(x)(t - x)^2 + \dots, \quad (13)$$

Во избежание громоздких выкладок ограничимся в разложениях (10)–(11) первыми двумя слагаемыми:

здесь главный член асимптотики задается формулой (8).

Аналогично случаю с линейной функцией получим систему уравнений:

$$C(x, t) = C_0(x) + C_1(x)(t - x) + \dots; \quad (12)$$

$$(t - x)^0: \quad C_0'(x) = -(1 - \alpha)\lambda_0 C_0(x) - \alpha\lambda_0 C_0^3(x), \quad S_1(x) = (1 - \alpha)\lambda_0 C_0(x) + \alpha\lambda_0 C_0^3(x);$$

$$(t - x)^1: \quad C_1'(x) = -(1 - \alpha)\lambda_0 C_1(x) - (1 - \alpha)\lambda_1 C_0(x)S_1(x) - 3\alpha\lambda_0 C_0^2(x)C_1(x) - \alpha\lambda_1 C_0^3(x)S_1(x),$$

$$S_2(x) = (1 - \alpha)\lambda_0 C_1(x) + (1 - \alpha)\lambda_1 C_0(x)S_1(x) + 3\alpha\lambda_0 C_0^2(x)C_1(x) + \alpha\lambda_1 C_0^3(x)S_1(x).$$

откуда

$$C_0 = \frac{\sqrt{1 - \alpha} e^{-(1 - \alpha)\lambda_0 x}}{\sqrt{1 - \alpha} e^{-2(1 - \alpha)\lambda_0 x}}, \quad S_1(x) = \frac{\sqrt{(1 - \alpha)^3} \lambda_0 e^{-(1 - \alpha)\lambda_0 x}}{\sqrt{1 - \alpha} e^{-2(1 - \alpha)\lambda_0 x}} + \frac{\alpha \sqrt{(1 - \alpha)^3} \lambda_0 e^{-3(1 - \alpha)\lambda_0 x}}{\sqrt{(1 - \alpha) e^{-2(1 - \alpha)\lambda_0 x}}^3};$$

$$C_1(x) = \lambda_1 C_0(x) (C_0(x) - 1) (1 - \alpha + \alpha C_0^2(x)),$$

$$S_2(x) = 4\alpha^2 \lambda_0 \lambda_1 C_0^6(x) - 3\alpha^2 \lambda_0 \lambda_1 C_0^5(x) + 6\alpha \lambda_0 \lambda_1 C_0^4(x) (1 - \alpha) - 4\alpha \lambda_0 \lambda_1 C_0^3(x) (1 - \alpha) + 2\lambda_0 \lambda_1 C_0^2(x) (1 - \alpha)^2 - \lambda_0 \lambda_1 C_0(x) (1 - \alpha)^2.$$

Подставляем полученные выражения в разложения (12)–(13), получаем асимптотические решения

$$C(x, t) = \frac{\sqrt{1 - \alpha} e^{-(1 - \alpha)\lambda_0 x}}{\sqrt{1 - \alpha} e^{-2(1 - \alpha)\lambda_0 x}} + \lambda_1 C_0(x) (C_0(x) - 1) (1 - \alpha + \alpha C_0^2(x)) (t - x),$$

$$S(x, t) = \left( \frac{\sqrt{(1 - \alpha)^3} \lambda_0 e^{-(1 - \alpha)\lambda_0 x}}{\sqrt{1 - \alpha} e^{-2(1 - \alpha)\lambda_0 x}} + \frac{\alpha \sqrt{(1 - \alpha)^3} \lambda_0 e^{-3(1 - \alpha)\lambda_0 x}}{\sqrt{(1 - \alpha) e^{-2(1 - \alpha)\lambda_0 x}}^3} \right) (t - x) +$$

$$+ \frac{1}{2} (4\alpha^2 \lambda_0 \lambda_1 C_0^6(x) - 3\alpha^2 \lambda_0 \lambda_1 C_0^5(x) + 6\alpha \lambda_0 \lambda_1 C_0^4(x) (1 - \alpha) - 4\alpha \lambda_0 \lambda_1 C_0^3(x) (1 - \alpha) + 2\lambda_0 \lambda_1 C_0^2(x) (1 - \alpha)^2 - \lambda_0 \lambda_1 C_0(x) (1 - \alpha)^2) (t - x)^2.$$

### Численное решение задачи

Решим поставленную задачу численным методом конечных разностей. Для сходимости метода шаги по временной оси  $t$  и оси координат  $x$  были выбраны  $h_t = h_x = 0.01$ , что обеспечивает выполнение условия Куранта. Коэффициенты функции фильтрации получены экспериментальным путем и равны  $\lambda_0 = 1.551$ ,  $\lambda_1 = -3.467 \cdot 10^{-3}$ ,  $\lambda_2 = -1.16 \cdot 10^{-6}$ ,  $\lambda_3 = -1.16 \cdot 10^{-7}$  [17].

На рисунке 1 представлены графики концентрации взвешенных частиц в момент времени

$t = 100$  для линейной (рис. 1а) и кубической (рис. 1б) функции концентрации: сплошная линия соответствует численному решению задачи, пунктирная линия – асимптотическому решению. Из рисунков видно, что асимптотика для обеих функций концентраций дает достаточно хорошее приближение, наибольшее расхождение наблюдается на входе фильтра. Относительная погрешность асимптотики в случае линейной функции концентрации составляет порядка 5 %, в случае нелинейной функции фильтрации – 3 %.

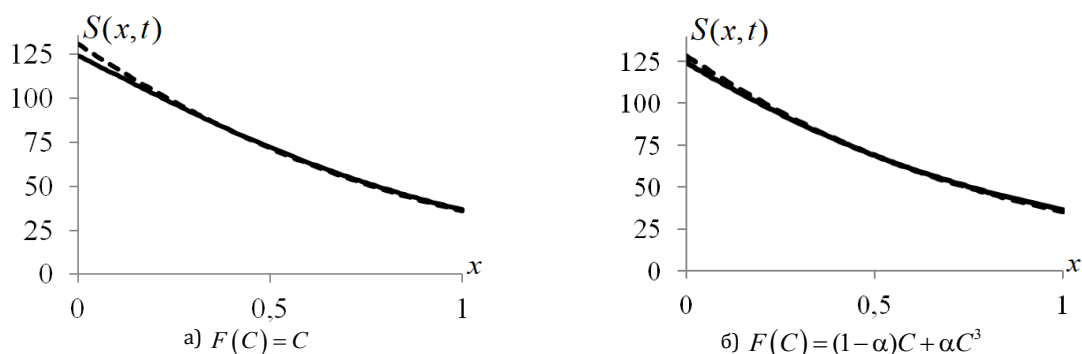


Рис. 1. Численные и асимптотические решения концентрации взвешенных частиц при  $t = 100$

На рисунке 2 представлены относительные погрешности асимптотики концентрации взвешенных частиц для различных моментов времени  $t$ :  $t = 1$  (сплошная линия),  $t = 50$  (пунктирная линия),  $t = 100$  (штрих-пунктирная линия).

швенных частиц для различных моментов времени  $t$ :  $t = 1$  (сплошная линия),  $t = 50$  (пунктирная линия),  $t = 100$  (штрих-пунктирная линия).

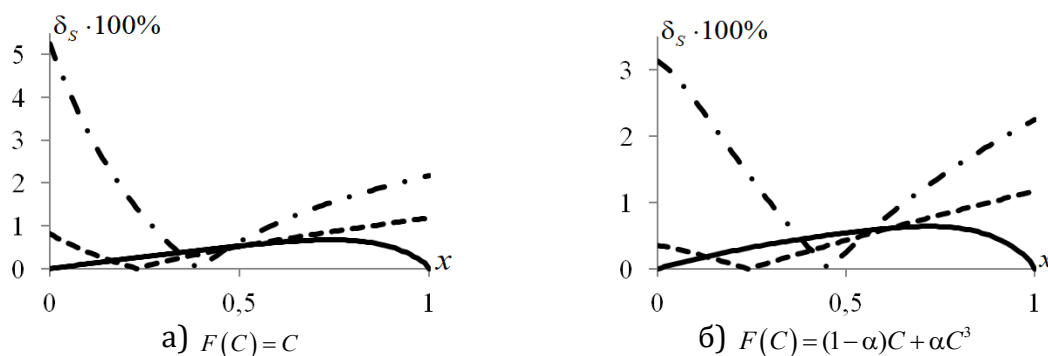


Рис. 2. Относительные погрешности асимптотики концентрации взвешенных частиц при различных значениях  $t$

На рисунке 3 изображены графики концентрации осажденных частиц при  $x = 0.5$  (рис. 3а) и на выходе фильтра при  $x = 1$  (рис. 3б), для функции концентрации  $F(C) = C$ . Численное решение обозначено сплошной линией, асимптотическое решение – пунктирной. Аналогичные графики для случая  $F(C) = (1 - \alpha)C + \alpha C^3$  представлены на рисунке 4.

шение обозначено сплошной линией, асимптотическое решение – пунктирной. Аналогичные графики для случая  $F(C) = (1 - \alpha)C + \alpha C^3$  представлены на рисунке 4.

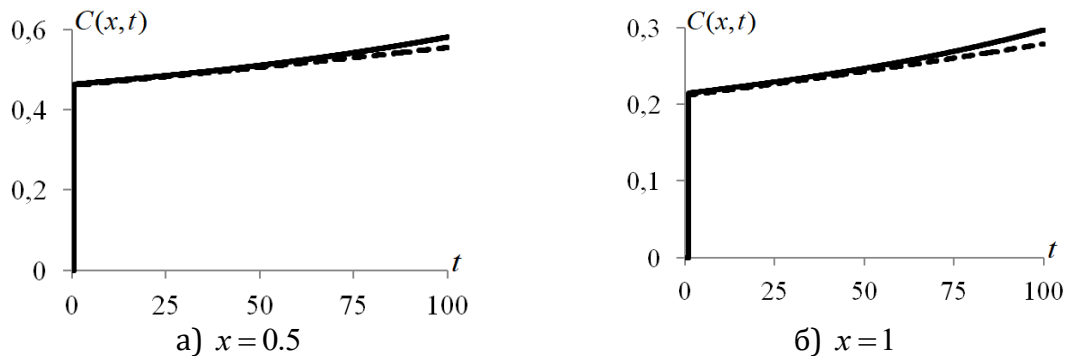


Рис. 3. Численные и асимптотические концентрации осажденных частиц для  $F(C) = C$

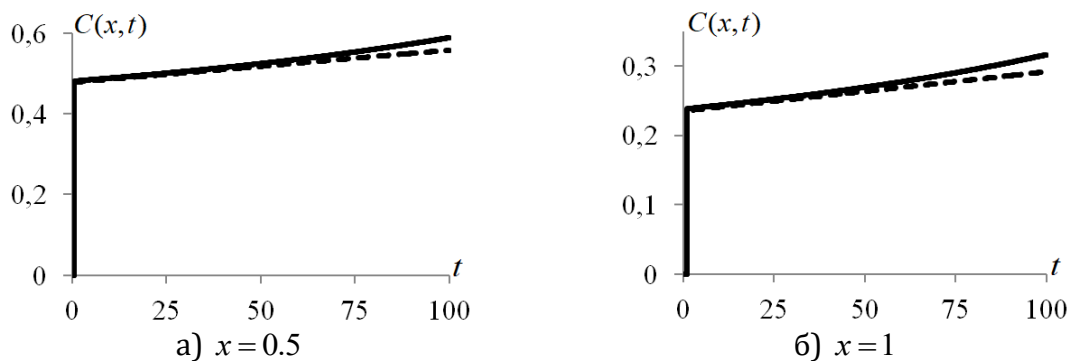


Рис. 4. Численные и асимптотические концентрации осажденных частиц для  $F(C) = (1 - \alpha)C + \alpha C^3$

Относительные погрешности асимптотики концентрации осажденных частиц для различ-

ных функций фильтрации изображены на рисунке 5. Случай  $x = 0.5$  соответствует сплошной линии, случай  $x = 1$  – пунктирной.

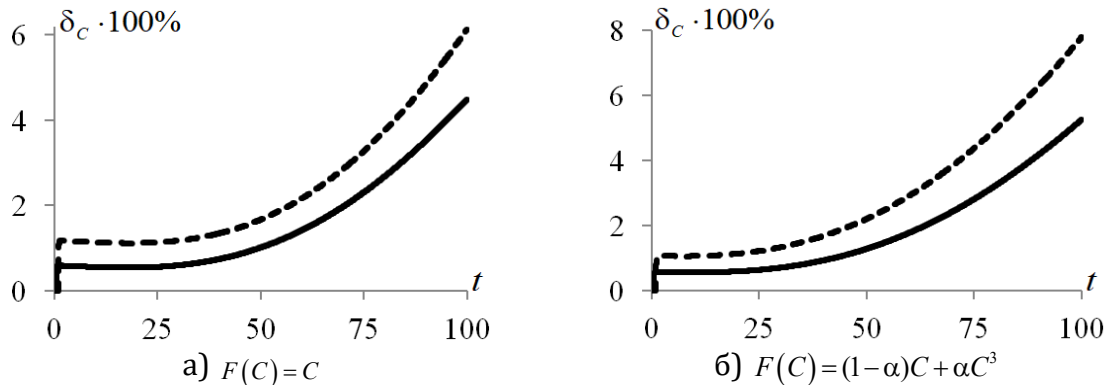


Рис. 5. Относительные погрешности асимптотики концентрации осажденных частиц при различных значениях  $x$

Вышеприведенные графики показывают, что с увеличением времени отклонение асимптотики от численного решения растет, примерно до момента времени  $t = 50$  относительная погрешность асимптотики для обеих функций концентраций менее 2 %, в момент времени  $t = 100$  на выходе фильтра при  $x = 1$  относительная погрешность асимптотики в случае линейной функции концентрации составляет чуть более 6 %, с нелинейной функцией – 8 %.

#### Выводы

В работе рассматривается математическая модель глубинной фильтрации с размерным механизмом захвата частиц и со смешанным механизмом, объединяющим размерный механизм и механизм образования сводовых перемычек. В первом случае твердые частицы свободно проходят через поры, диаметр которых больше размера частиц, и закупоривают поры с меньшим диаметром. При смешанном механизме часть твердых частиц беспрепятственно проходит через горловины пор, некоторые застревают в них, а другие могут блокировать поры, образуя сводовые перемычки. Одновременно несколько частиц соединяются, прикрепляются к краям поры, тем самым перекрывая ее и предотвращая попадание суспензии в пору. В рассматриваемой модели линейная функция концентрации  $F(C) = C$  описывает размерный механизм захвата части, нелинейная функция

$F(C) = (1 - \alpha)C + \alpha C^3$  – смешанный. В рассматриваемой модели фильтрации в качестве функции фильтрации  $\Lambda(S)$  использовался полином третьей степени.

Построенные асимптотики концентраций взвешенных и осажденных частиц вблизи фронта концентраций дают хорошие приближения к численным решениям даже в достаточно больших временных интервалах. Асимптотическое решение концентрации взвешенных частиц второго порядка, построенное для нелинейной функции концентрации, более близко к численному решению. Для осажденных частиц асимптотика второго порядка в случае линейной функции концентрации лучше приближает численное решение, чем асимптотика первого порядка при использовании нелинейной функции концентрации, например, на выходе фильтра в момент времени  $t = 100$  относительная погрешность асимптотики второго порядка на 2 % меньше погрешности асимптотики первого порядка.

При полевых исследованиях фильтрации пластовых вод в пористой породе погрешности измерений составляют не менее 10 % [18]. Следовательно, предлагаемые асимптотические формулы адекватно описывают процесс фильтрации до времени  $t = 100$ .

#### Список литературы

1. Drooff E. R. Jet grouting to support historic buildings / E. R. Drooff, A. J. Furth, J. A. Scarborough // Geotechnical Special Publication. – 1995. – Vol. 50. – P. 42–55.
2. Богов С. Г. Адаптация струйной технологии для целей освоения подземного пространства в исторической части Санкт-Петербурга в условиях слабых грунтов / С. Г. Богов // Жилищное строительство. – 2014. – № 3. – С. 25–30.
3. Шашкин А. Г. Использование технологии jet grouting при устройстве подземного объема в условиях слабых глинистых грунтов / А. Г. Шашкин, С. Г. Богов // Научно-технический и производственный журнал. – 2014. – № 9. – С. 27–33.
4. Principles of filtration / C. Tien. – Elsevier : Amsterdam, 2012. – 334 p.
5. Fallah H. Size exclusion mechanism, suspension flow through porous medium / H. Fallah, A. Fallah, A. Rahmani, M. Afkhami, A. Ahmadi // International Journal of Modern Nonlinear Theory and Application. – 2012. – Vol. 1. – P. 113–117.
6. Santos A. Size exclusion during particle suspension transport in porous media: stochastic and averaged equations / A. Santos, P. Bedrikovetsky // Computational and Applied Mathematics. – 2004. – Vol. 23 (2–3). – P. 259–284.
7. You Z. Exact solution for long-term size exclusion suspension-colloidal transport in porous media / Z. You, P. Bedrikovetsky, L. Kuzmina // Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis. – 2013. – Vol. 2013. – P. 680693.

8. Kuzmina L. I. Exact solution for 1D deep bed filtration with particle capture by advection and dispersion / L. I. Kuzmina, Yu. V. Osipov // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2021. – Vol. 137. – P. 103830.
9. Nazaikinskii V. E. Exact solution for deep bed filtration with finite blocking time / V. E. Nazaikinskii, P. G. Bedrikovetsky, L. I. Kuzmina, Y. V. Osipov // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 2020. – Vol. 80 (5). – P. 2120–2143.
10. Kuzmina L. I. Analytical model for deep bed filtration with multiple mechanisms of particle capture / L. I. Kuzmina, Y. V. Osipov, Y. G. Zhiglova // International Journal of Non-linear Mechanics. – 2018. – Vol. 105. – P. 242–248.
11. Kuzmina L. I. Asymptotics for filtration of polydisperse suspension with small impurities / L. I. Kuzmina, Y. V. Osipov, T. N. Gorbunova // Applied Mathematics and Mechanics (English Edition). – 2021. – Vol. 42 (1). – P. 109–126.
12. Osipov Y. V. Calculation of filtration of polydisperse suspension in a porous medium / Y. V. Osipov // MATEC Web of Conferences. – 2017. – Vol. 117. – P. 00131.
13. Kuzmina L. I. Deep bed filtration asymptotics at the filter inlet / L. I. Kuzmina, Yu. V. Osipov // Procedia Engineering. – 2016. – Vol. 153. – P. 366–370.
14. Safina G. L. Calculation of retention profiles in porous medium / G. L. Safina // Lecture Notes in Civil Engineering. – 2021. – Vol. 170. – P. 21–28.
15. Сафина Г. Л. Решение задачи фильтрации численными методами Numerical solution of filtration in porous rock / Г. Л. Сафина // Вестник гражданских инженеров. – 2019. – № 4 (75). – С. 68–73.
16. Галагуз Ю. П. Моделирование процесса вытеснения суспензии / Ю. П. Галагуз, Г. Л. Сафина // Вестник МГСУ. – 2019. – Т. 13 (8). – С. 944–951.
17. You Z. Asymptotic model for deep bed filtration / Z. You, Y. Osipov, P. Bedrikovetsky, L. Kuzmina // Chemical Engineering Journal. – 2014. – Vol. 258. – P. 374–385.
18. Dev Burman G. K. Groundwater exploration in hard rock terrain: An experience from eastern India / G. K. Dev Burman, P. K. Das // The Hydrological Basis for Water Resources Management. – 1990. – Vol. 197. – P. 19–30.

© Г. Л. Сафина, Э. Р. Рахматуллина

**Ссылка для цитирования:**

Сафина Г. Л., Рахматуллина Э. Р. Фильтрация суспензии в пористой среде с двумя типами функции концентрации // Инженерно-строительный вестник Прикаспия : научно-технический журнал / Астраханский государственный архитектурно-строительный университет. Астрахань: ГАОУ АО ВО «АГАСУ», 2022. № 1 (39). С. 16–22.

УДК 620.9:621.57

DOI 10.52684/2312-3702-2022-39-1-22-28

## **ГЕЛИОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ СОРБЦИОННЫЕ ТЕРМОТРАНСФОРМАТОРЫ ДЛЯ СИСТЕМ ОТОПЛЕНИЯ И КОНДИЦИОНИРОВАНИЯ**

**М. Ф. Руденко, В. Н. Саинова, Ю. В. Шипулина, Л. П. Третьяк, А. А. Токарева**

**Руденко Михаил Федорович**, доктор технических наук, профессор кафедры «Безопасность жизнедеятельности и инженерная экология», Астраханский государственный технический университет, г. Астрахань, Российская Федерация, e-mail: mf.rudenko@mail.ru;

**Саинова Виктория Николаевна**, кандидат технических наук, доцент, заведующая кафедрой «Безопасность жизнедеятельности и инженерная экология», Астраханский государственный технический университет, г. Астрахань, Российская Федерация, e-mail: sainovav@yandex.ru;

**Шипулина Юлия Викторовна**, кандидат технических наук, доцент кафедры «Безопасность жизнедеятельности и инженерная экология», Астраханский государственный технический университет, г. Астрахань, Российская Федерация, e-mail: aleera78@mail.ru;

**Третьяк Людмила Павловна**, кандидат биологических наук, доцент кафедры «Безопасность жизнедеятельности и инженерная экология», Астраханский государственный технический университет, г. Астрахань, Российская Федерация, e-mail: miss.tretyak@list.ru;

**Токарева Анна Анатольевна**, кандидат географических наук, доцент кафедры «Безопасность жизнедеятельности и инженерная экология», Астраханский государственный технический университет, г. Астрахань, Российская Федерация, e-mail: margam\_gamma@mail.ru

Энергосбережение и чистая экология – две основные тенденции развития современной энергетики южных регионов страны для производства электрической энергии, горячей воды, отопления и кондиционирования. Рассматриваются термотрансформаторы абсорбционного и адсорбционного принципа действия различного назначения (тепловые насосы и холодильные машины), выпускаемые промышленностью. Предлагаются экспериментальные разработки термотрансформаторов сорбционного типа циклического действия, реализующие технологию получения теплоты и холода из энергии солнечной радиации. Особенностью их работы является использование физических и химических процессов адсорбции – десорбции и «сухой» абсорбции – десорбции в обратных термодинамических циклах. Конструктивно они представляют развитые гелиоприемные аппараты, состоящие из двух параллельно соединенных генераторов-адсорберов, реакторы которых