

ОТОЗВАНА/RETRACTED 14.07.2022  
УДК 519.714.2  
DOI 10.52684/2312-3702-2021-38-4-107-113

## ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА ОПТИМИЗАЦИИ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССОМ НАГРЕВА ДИСКА

С. С. Гусев<sup>1</sup>, Е. Ф. Анисимов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Россия;

<sup>2</sup>Московский политехнический университет, г. Москва, Россия

В данной работе рассматриваемая задача о приведении температуры диска к заданной температуре к конечному моменту времени. Вначале формулируется постановка задачи исследования, которая заключается в построении решения задачи для определения оптимального управления процессом нагрева диска. Новизна данной работы заключается в привлечении средств программирования и визуализации к решению задачи оптимизации. Далее приводится построение неявной центрально-разностной схемы, которое сводится к введению безразмерных переменных, что приводит к построению шаблона неявной центрально-разностной схемы, которая представлена далее на рисунке 3. Затем приводится определение порядка аппроксимации неявной центрально-разностной схемы, где показывается, что погрешность аппроксимации данной схемы имеет второй порядок. После, формулируется и приводится доказательство устойчивости неявно-разностной схемы, где исследуется неявно-разностная схема на устойчивость, для чего мы впоследствии воспользуемся необходимым спектральным условием Неймана устойчивости схемы по начальным данным. Затем приводится представление граничных условий в разностном виде, где граничные условия в разностном виде должны также иметь второй порядок аппроксимации. И в конце приводится метод решения задачи оптимального управления, где мы сводим задачу оптимального управления к задаче условной оптимизации.

**Ключевые слова:** температура, диск, время, конечный момент, задача исследования, процесс, оптимальное управление, неявная центрально-разностная схема, безразмерные переменные, аппроксимация, погрешность аппроксимации, порядок аппроксимации, доказательство устойчивости неявно-разностной схемы.

## NUMERICAL IMPLEMENTATION OF THE OPTIMIZATION METHOD FOR FINDING THE OPTIMAL CONTROL OF THE DISK HEATING

S. S. Gusev<sup>1</sup>, E. F. Anisimov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

<sup>2</sup>Moscow Polytechnic University, Moscow, Russia

In this paper, we consider the problem of bringing the disk temperature to a given temperature at a finite time. First, the statement of the research problem is formulated, which consists in constructing a solution to the problem for determining the optimal control of the disk heating process. The novelty of this work lies in the use of programming and visualization tools to solve the optimization problem. The construction of the implicit central-difference scheme is given below, which reduces to the introduction of dimensionless variables, which leads to the construction of the template of the implicit central-difference scheme, which is presented further in Figure 3. Then the definition of the order of approximation of the implicit central-difference scheme is given, where it is shown that the error of approximation of this scheme is of the second order. After that, we formulate and present a proof of the stability of the implicit-difference scheme, where we study the implicit-difference scheme for stability, for which we subsequently use the necessary Neumann spectral condition for the stability of the scheme from the initial data. Then a representation of the boundary conditions in the difference form is given, where the boundary conditions in the difference form must also have a second order of approximation. And at the end, we present a method for solving the optimal control problem, where we reduce the optimal control problem to the conditional optimization problem.

**Keywords:** temperature, disk, time, finite moment, research problem, process, optimal control, implicit central difference scheme, dimensionless variables, approximation, approximation error, approximation order, proof of stability of the implicit difference scheme.

### Введение

Задачи оптимизации встречаются практически во всех сферах человеческой деятельности, так как любое разумное действие является в определенном смысле и оптимальным. Ведь оно выбрано после сравнения с другими (менее предпочтительными) действиями.

Оптимизация - целенаправленная деятельность, заключающаяся в получении наилучших результатов при соответствующих условиях.

Поиски оптимальных решений привели к созданию специальных математических методов и уже в 18 веке были заложены математические основы оптимизации (вариационное исчисление, численные методы и др). Однако до второй половины 20 века методы оптимизации во многих областях науки и техники применялись очень редко, поскольку практическое использование математических методов [6] оптимизации требовало огромной вычислительной работы, которую без ЭВМ реализовать было крайне трудно, а в ряде случаев - невозможно.

Если отвлечься от экономического, физического, химического или иного содержания этих задач, то все они сводятся к следующей оптимизационной задаче. Найти минимум (или максимум) функции или функционала на некотором множестве некоторого пространства, то есть здесь выражает качество управления, а множество определяется ограничениями на ресурсы, возможностями экономических или других процессов в изучаемой системе.

Данная работа посвящена постановке задачи, построению решения задачи для определения оптимального управления процессом нагрева диска. Новизна данной работы заключается в привлечении средств программирования и визуализации к решению задачи оптимизации.

В ходе работы ставились следующие задачи:

- постановка задачи оптимального управления;
- исследование этой задачи;
- изучение численных методов решения задач оптимизации.

Вначале ставится задача оптимального управления. Далее исследуется данная задача и находится численный метод ее решения. И наконец, ставится задача мощного средства решения различных инженерных и прикладных задач. В заключении подводятся итоги статьи. Основным результатом работы является численная реализация метода оптимизации для

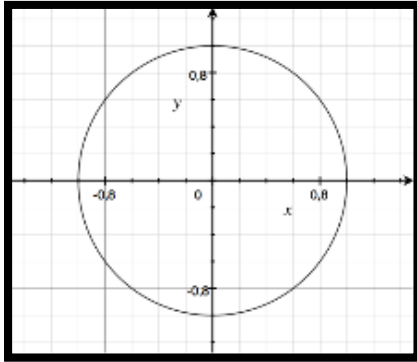


Рис. 1. Осевая симметрия

В данном случае модель процесса описывается одномерным параболическим уравнением:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^n k(r) \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right), \quad (1)$$

где

$n = 1$  – см. рисунок 1,

$n = 2$  – см. рисунок 2,

$\varphi(t, r)$  – температура тела в точке  $r$  в момент времени  $t$ ,

$r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ , ( $0 \leq x_0 \leq 1$ ), ( $0 \leq y_0 \leq 1$ )

$t_k$  – конечный момент времени ( $0 \leq t \leq t_k$ ),

$R$  – радиус диска или шара ( $0 \leq r \leq R$ ),

$k$  – коэффициент теплопроводности. В дальнейшем будем считать его не зависящим от  $r$ , т.е.  $k = const$ .

При  $t = 0$ , ставится начальное условие:

$$\varphi(0, r) = \varphi_0(r). \quad (2)$$

При  $r = R$  граничное условие имеет вид:

$$\frac{\partial \varphi(t, R)}{\partial r} + \alpha \varphi(t, R) = \alpha U(t). \quad (3)$$

$U(t)$  – температура на границе, которая находится полностью в нашем распоряжении. В данной работе  $U(t)$  – является управляющей функцией, зависящей от времени, а  $\alpha$  – является положительным коэффициентом пропорциональности, называемый коэффициентом теплообмена.

$$J = \int_0^R r^n [\varphi(t_k, r) - \varphi_g(r)]^2 dr + \beta \int_0^{t_k} U(t)^2 dt. \quad (6)$$

Прежде всего найдем выражение для вариации функционала (6) через вариацию управления (5). Для этого придадим управлению  $U(t)$  некоторое малое приращение  $\delta U(t)$ . Тогда, очевидно, также, что малые приращения получат и

нахождения оптимального управления процессом нагрева диска.

### Постановка задачи

В докладе рассматривается задача оптимального управления нестационарного процесса теплопроводности в диске или в шаре. В первом случае мы имеем осевую симметрию, во втором – центральную [8–11], которые приведены ниже на рисунках 1 и 2 соответственно.

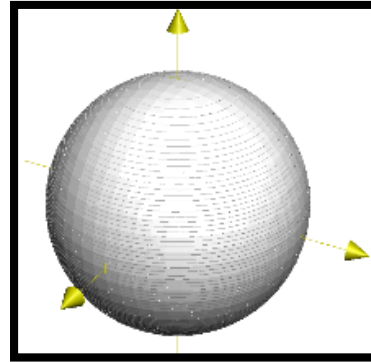


Рис. 2. Центральная симметрия

При  $r = 0$ , ставится условие ограниченности, т.е.  $|\varphi(t, 0)| < \infty$ , которое является следствием непрерывности и дифференцируемости решения уравнения (1):

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^n k \frac{\partial \varphi(t, r)}{\partial r} = 0. \quad (4)$$

В данной работе рассматриваемая задача о приведении температуры диска к заданной температуре к конечному моменту времени. А именно, требуется найти функцию  $\varphi(t, r)$ , которая является решением уравнения (1) и удовлетворяет условиям (2) – (4), найти допустимое управление  $U(t)$ , т.е. функцию  $U(t)$ , удовлетворяющую ограничениям вида:

$$0 < U^- \leq U(t) \leq U^+, \quad (5)$$

где  $U^+$  и  $U^-$  – заданные константы, а также, управляя температурой на границе, к заданному моменту  $t_k > 0$  распределение температуры в области сделать как можно ближе к заданному распределению  $\varphi_g(r)$ ,  $0 \leq r \leq R$ .

Математическая формулировка этой задачи: рассмотрим функционал, характеризующий отклонение текущей температуры от целевой температуры. Необходимо определить функцию  $U(t)$ , которая доставляет минимум данного функционала:

функция  $\varphi(t, r)$ , и функционал (6). При этом уравнение (1) примет вид:

$$\frac{\partial(\varphi + \delta\varphi)}{\partial t} = \frac{k}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^n \frac{\partial(\varphi + \delta\varphi)}{\partial r} \right) \quad (7),$$

а функционал (6):



$$J + \delta J = \int_0^R r^n [\varphi(t_k, r) + \delta\varphi(t_k, r) - \varphi_g(r)]^2 dr + \beta \int_0^{t_k} (U(t) + \delta U(t))^2 dt.$$

Отметим, то функция  $\varphi(t, r)$  удовлетворяет уравнению (1). Вычтем из уравнения (7) уравнение (1). Получим:

$$\frac{\partial(\varphi + \delta\varphi)}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{k}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^n \frac{\partial(\varphi + \delta\varphi)}{\partial r} \right) - \frac{k}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^n \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right).$$

Отсюда, зная общий вид первой вариации и ограничиваясь членами первого порядка малости, мы получим для  $\delta\varphi(t, r)$  так называемое уравнение в вариациях следующего вида:

$$\frac{\partial\delta\varphi}{\partial t} = \frac{k}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^n \frac{\partial\delta\varphi}{\partial r} \right) \quad (8)$$

со следующими граничными и начальными условиями:

$$\begin{aligned} \delta\varphi(0, r) &= 0, \\ \lim_{r \rightarrow 0} \left( r^n \frac{\partial\delta\varphi(t, r)}{\partial r} \right) &= 0, \\ \frac{\partial\delta\varphi(t, R)}{\partial r} + \alpha\delta\varphi(t, R) &= \alpha\delta U(t). \end{aligned} \quad (9)$$

Ограничиваясь также членами первого порядка малости в выражении для приращения функционала, получим формулу для вариации функционала:

$$\delta J = \int_0^R 2r^n [\varphi(t_k, r) - \varphi_g(r)] \delta\varphi(t_k, r) dr + 2\beta \int_0^{t_k} U(t) \delta U(t) dt. \quad (10)$$

Введем скалярное произведение двух функций  $f(t, r)$  и  $g(t, r)$  в гильбертовом пространстве  $L_2[Q]$ ,  $Q = \{0 \leq r \leq R\}$  по следующему правилу [9]:

$$\langle f, g \rangle(t) = \int_0^R r^n f(t, r) g(t, r) dr.$$

Отсюда видно, что  $\langle f, g \rangle$  является функцией времени.

Покажем, что

$$\int_0^R 2r^n [\varphi(t_k, r) - \varphi_g(r)] \delta\varphi(t_k, r) dr = \alpha k R^n \int_0^{t_k} \psi(t, R) \delta U(t) dt, \quad (11)$$

где  $\psi(t, R)$  – решение вспомогательного сопряженного уравнения вида [9]:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{k}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^n \frac{\partial\psi(t, r)}{\partial r} \right), \quad (12)$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} r^n k \frac{\partial\psi(t, r)}{\partial r} &= 0, \\ \frac{\partial\psi(t, R)}{\partial r} + \alpha\psi(t, R) &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Следует отметить, что природа уравнения (12) такова, что задание начальных условий при  $t = 0$  делает задачу (12), (13) некорректной и поэтому условие надо выставлять при  $t = t_k$ , а решение этой задачи можно получить двигаясь от момента  $t = t_k$  к  $t = 0$ . О том, какие условия необходимо выставить при  $t = t_k$ , будет указано несколько позже [8].

Продолжим вывод равенства (11), пользуясь сопряженной системой и введенными скалярным произведением.

Равенство (11) получено. Подставляя (11) в (10) будем иметь:

$$\delta J = \alpha k R^n \int_0^{t_k} \psi(t, R) \delta U(t) dt + 2\beta \int_0^{t_k} U(t) \delta U(t) dt.$$

т.е.

$$\delta J = \int_0^{t_k} (\alpha k R^n \psi(t, R) + 2\beta U(t)) \delta U(t) dt. \quad (14)$$

Далее подчиним  $\psi(t_k, r)$  следующему условию:

$$\psi(t_k, r) = 2[\varphi(t_k, r) - \varphi_g(r)]. \quad (15)$$

Таким образом, в работе была получена формула для вариации минимизируемого функционала, выраженную через вариацию управления. Эта формула позволит применять для решения нашей задачи известные численные методы оптимизации, в том числе и метод градиентного спуска. Стоит отметить, что многие исследователи изучают процессы теплопроводности. В работах [13, 14] рассматриваются более сложные модели и исследуется вопрос о свойствах дискретизированных задач, а именно изучаются вопросы сходимости предлагаемых методов и разностных схем.

#### Численный метод решения задачи

*Построение неявной центрально-разностной схемы*

Введем безразмерные переменные следующим образом [1]:

$$r' = \frac{r}{R}, t' = \frac{kt}{R^2}.$$

В этих переменных управление (1) запишется в виде:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{1}{r^n} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^n \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right), \quad (16)$$

а наша краевая задача определена в прямоугольнике:

$$D = (0 \leq r \leq 1, 0 \leq t \leq t_k).$$

Отметим, что здесь мы переменные  $r'$  и  $t'$  снова обозначили через  $r$  и  $t$ .

Условие (3) будет иметь тот же вид, если иметь ввиду, что коэффициент теплообмена  $\alpha$

теперь примет вид  $\alpha R$ , а эту величину мы снова обозначим через  $\alpha$ .

Введем сетки:

$$\omega_h = \{r_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N\}$$

$$\omega_\tau = \{t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, j_0\}$$

с шагами  $h = \frac{1}{N}$  и  $\tau = \frac{t_k}{j_0}$ .

Обозначим через  $\varphi_i^j$  значение в узле  $(r_i, t_j)$  сеточной функции  $\varphi$ , определенной на  $D$ . Замена производные  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$  и  $\frac{\partial}{\partial r} \left( r^n k \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)$  их разностными выражениями построим неявную центрально-разностную схему для уравнения (16).

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\varphi_i^{j+1} - \varphi_i^j}{\tau},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\varphi_{i+1}^{j+1} - \varphi_i^{j+1}}{h}.$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^n \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left( r^n \frac{\varphi_{i+1}^{j+1} - \varphi_i^{j+1}}{h} \right) = \left( \frac{r_{i+1} + r_i}{2} \right)^n \frac{\varphi_{i+1}^{j+1} - \varphi_i^{j+1}}{h^2} - \left( \frac{r_i + r_{i-1}}{2} \right)^n \frac{\varphi_i^{j+1} - \varphi_{i-1}^{j+1}}{h^2}$$

Следовательно, схема будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\varphi_i^{j+1} - \varphi_i^j}{\tau} = \frac{1}{r_i^n h} \left( \left( \frac{r_{i+1} + r_i}{2} \right)^n \frac{\varphi_{i+1}^{j+1} - \varphi_i^{j+1}}{h} - \left( \frac{r_i + r_{i-1}}{2} \right)^n \frac{\varphi_i^{j+1} - \varphi_{i-1}^{j+1}}{h} \right). \quad (17)$$

#### Определение порядка аппроксимации неявной центрально-разностной схемы

Покажем, что погрешность аппроксимации данной схемы имеет второй порядок.

$$\varphi_{i+1}^{j+1} = \varphi_i^{j+1} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_i^{j+1} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \Big|_i^{j+1} h^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} \Big|_i^{j+1} h^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} \Big|_i^{j+1} h^4 + \frac{1}{5!} \frac{\partial^5 \varphi}{\partial r^5} \Big|_i^{j+1} h^5 + \dots,$$

$$\varphi_{i-1}^{j+1} = \varphi_i^{j+1} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_i^{j+1} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \Big|_i^{j+1} h^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} \Big|_i^{j+1} h^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} \Big|_i^{j+1} h^4 - \frac{1}{5!} \frac{\partial^5 \varphi}{\partial r^5} \Big|_i^{j+1} h^5 + \dots,$$

Подставим представления в ряд Тейлора в правую часть центрально-разностной схемы [4, 5, 7]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r_i^n h} \left( \left( \frac{r_{i+1} + r_i}{2} \right)^n \frac{\varphi_{i+1}^{j+1} - \varphi_i^{j+1}}{h} - \left( \frac{r_i + r_{i-1}}{2} \right)^n \frac{\varphi_i^{j+1} - \varphi_{i-1}^{j+1}}{h} \right) = \\ & = \frac{1}{r_i^n h^2} \left[ \left( \frac{r_{i+1} + r_i}{2} \right)^n \varphi_{i+1}^{j+1} - \left( \left( \frac{r_{i+1} + r_i}{2} \right)^n - \left( \frac{r_i + r_{i-1}}{2} \right)^n \right) \varphi_i^{j+1} + \left( \frac{r_i + r_{i-1}}{2} \right)^n \varphi_{i-1}^{j+1} \right] = \\ & = \frac{1}{r_i^n h^2} \left[ \left( \frac{r_{i+1} + r_i}{2} \right)^n \left( \varphi_i^{j+1} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_i^{j+1} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \Big|_i^{j+1} h^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} \Big|_i^{j+1} h^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} \Big|_i^{j+1} h^4 + \frac{1}{5!} \frac{\partial^5 \varphi}{\partial r^5} \Big|_i^{j+1} h^5 + \dots \right) \right. \\ & \quad + \left( \frac{r_i + r_{i-1}}{2} \right)^n \left( \varphi_i^{j+1} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_i^{j+1} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \Big|_i^{j+1} h^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} \Big|_i^{j+1} h^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} \Big|_i^{j+1} h^4 \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{5!} \frac{\partial^5 \varphi}{\partial r^5} \Big|_i^{j+1} h^5 + \dots \right) - \left( \left( \frac{r_{i+1} + r_i}{2} \right)^n - \left( \frac{r_i + r_{i-1}}{2} \right)^n \right) \varphi_i^{j+1} \right] \end{aligned}$$

Вынесем за скобки коэффициенты при  $\varphi_i^{j+1}$  и сократим с последним слагаемым. Получим:

Шаблон неявной центрально-разностной схемы выглядит следующим образом:

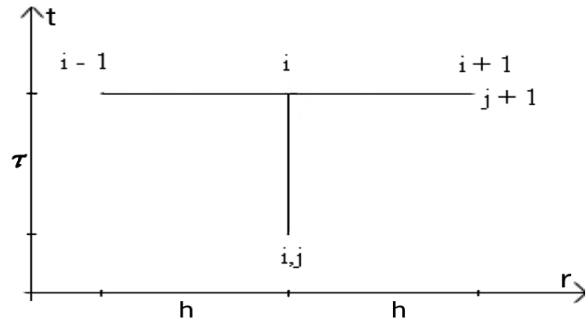


Рис. 3. Шаблон неявно-разностной схемы

Применим оператор  $\frac{\partial}{\partial r}$  к  $r^n \frac{\partial \varphi}{\partial r}$  и заменим производную по радиусу ее разностным выражением. Будем иметь:

Представим в виде ряда Тейлора  $\varphi_{i+1}^{j+1}, \varphi_{i-1}^{j+1}$  в окрестности точки  $(r_i, t^{j+1})$ :



$$\frac{1}{r_i^n h^2} \left[ \left( \frac{r_{i+1} + r_i}{2} \right)^n \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_i^{j+1} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \Big|_i^{j+1} h^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} \Big|_i^{j+1} h^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} \Big|_i^{j+1} h^4 + \frac{1}{5!} \frac{\partial^5 \varphi}{\partial r^5} \Big|_i^{j+1} h^5 + \dots \right) \right. \\ \left. + \left( \frac{r_i + r_{i-1}}{2} \right)^n \left( - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_i^{j+1} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \Big|_i^{j+1} h^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} \Big|_i^{j+1} h^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} \Big|_i^{j+1} h^4 - \frac{1}{5!} \frac{\partial^5 \varphi}{\partial r^5} \Big|_i^{j+1} h^5 + \dots \right) \right]$$

Очевидно, что  $r_i \approx \frac{r_{i+1} + r_i}{2}$  и  $r_i \approx \frac{r_i + r_{i-1}}{2}$ . Следовательно,

$$\frac{1}{r_i^n h^2} \left[ r_i^n \left( \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_i^{j+1} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \Big|_i^{j+1} h^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} \Big|_i^{j+1} h^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} \Big|_i^{j+1} h^4 + \dots \right) \right. \\ \left. + r_i^n \left( - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_i^{j+1} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \Big|_i^{j+1} h^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} \Big|_i^{j+1} h^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} \Big|_i^{j+1} h^4 - \dots \right) \right] = \\ = \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_i^{j+1} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \Big|_i^{j+1} h^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} \Big|_i^{j+1} h^3 + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} \Big|_i^{j+1} h^4 + \dots - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_i^{j+1} h + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \Big|_i^{j+1} h^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial r^3} \Big|_i^{j+1} h^3 \right. \\ \left. + \frac{1}{4!} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} \Big|_i^{j+1} h^4 - \dots \right] = \frac{1}{h^2} \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \Big|_i^{j+1} h^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial r^4} \Big|_i^{j+1} h^4 + \dots \right] = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \Big|_i^{j+1} + O(h^2)$$

Преобразуя эту схему и учитывая, что  $r_i = ih$ ,  $r_{i+1} = (i+1)h$ ,  $r_{i-1} = (i-1)h$ , будем иметь:

$$\frac{(2i+1)^n}{2^n i^n h^2} \varphi_{i+1}^{j+1} - \left[ \frac{(2i+1)^n + (2i-1)^n}{2^n i^n h^2} + \frac{1}{\tau} \right] \varphi_i^{j+1} + \frac{(2i-1)^n}{2^n i^n h^2} \varphi_{i-1}^{j+1} = \frac{\varphi_i^j}{\tau}.$$

Внесем в скобки  $\frac{1}{2^n i^n}$ :

$$\frac{(1 + \frac{1}{2i})^n}{h^2} \varphi_{i+1}^{j+1} - \left[ \frac{(1 + \frac{1}{2i})^n + (1 - \frac{1}{2i})^n}{h^2} + \frac{1}{\tau} \right] \varphi_i^{j+1} + \frac{(1 - \frac{1}{2i})^n}{h^2} \varphi_{i-1}^{j+1} = \frac{\varphi_i^j}{\tau}. \quad (18)$$

### Доказательство устойчивости неявно-разностной схемы

Исследуем эту неявно-разностную схему на устойчивость. Для этого воспользуемся необходимым спектральным условием Неймана устойчивости схемы по начальным данным [2, 3]:

«Спектр оператора перехода со слоя на слой должен лежать в единичном круге  $|\lambda(\alpha)| \leq 1$ ».

Возьмем в качестве начального условия гармонику  $e^{i\alpha n}$ . Рассмотрим оператор перехода со слоя на слой. Для удобства заменим обозначение  $\varphi_i^j$  на  $\varphi_m^j$ , так как в доказательстве будет фигурировать мнимая единица  $i$ . Получим:

$$\varphi_m^j = \lambda^j e^{i\alpha m}, \quad j = 1, 2, \dots, j_0$$

Пусть  $\frac{\tau}{h^2} = \mathcal{R} = const$ . При  $j = 0$  в равенстве (18) получаем:

$$\mathcal{R} \left( 1 + \frac{1}{2} \right)^n e^{i\alpha} - \left[ \mathcal{R} \left( \left( 1 + \frac{1}{2} \right)^n + \left( 1 - \frac{1}{2} \right)^n \right) + 1 \right] \lambda + \mathcal{R} \left( 1 - \frac{1}{2} \right)^n e^{-i\alpha} = 1.$$

Отсюда выразим  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{\mathcal{R} \left( \left( \frac{3}{2} \right)^n e^{i\alpha} + \left( \frac{1}{2} \right)^n e^{-i\alpha} \right) + 1}{\mathcal{R} \left( \left( \frac{3}{2} \right)^n + \left( \frac{1}{2} \right)^n \right) + 1}.$$

В начале рассмотрим случай осевой симметрии при  $n = 1$ :

$$\lambda = \frac{\mathcal{R} \left( \frac{3}{2} e^{i\alpha} + \frac{1}{2} e^{-i\alpha} \right) + 1}{2\mathcal{R} + 1} = \frac{\mathcal{R} \left( e^{i\alpha} + \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \right) + 1}{2\mathcal{R} + 1} = \frac{\mathcal{R}(2\cos\alpha + i\sin\alpha) + 1}{2\mathcal{R} + 1}.$$

Проверим спектральный критерий:

$$\frac{\mathcal{R}(2\cos\alpha + i\sin\alpha) + 1}{2\mathcal{R} + 1} \leq 1,$$

$$\left| \cos\alpha + \frac{1}{2} i\sin\alpha \right| \leq 1,$$

$$\cos^2 \alpha - \frac{1}{4} \sin^2 \alpha \leq 1.$$

Представим правую часть в виде основного тригонометрического тождества [12, 15]:

$$\cos^2 \alpha - \frac{1}{4} \sin^2 \alpha \leq \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha,$$

$$\lambda = \frac{\mathcal{R}\left(\frac{9}{4} e^{i\alpha} + \frac{1}{4} e^{-i\alpha}\right) + 1}{\frac{5}{2} \mathcal{R} + 1} = \frac{\mathcal{R}\left(2e^{i\alpha} + \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{4}\right) + 1}{\frac{5}{2} \mathcal{R} + 1} = \frac{\mathcal{R}\left(\frac{5}{2} \cos \alpha + 2i \sin \alpha\right) + 1}{\frac{5}{2} \mathcal{R} + 1}.$$

Проверим спектральный критерий:

$$\frac{\mathcal{R}\left(\frac{5}{2} \cos \alpha + 2i \sin \alpha\right) + 1}{\frac{5}{2} \mathcal{R} + 1} \leq 1,$$

$$\left| \cos \alpha + \frac{4}{5} i \sin \alpha \right| \leq 1,$$

$$\cos^2 \alpha - \frac{16}{25} \sin^2 \alpha \leq 1.$$

Представим правую часть в виде основного тригонометрического тождества:

$$\cos^2 \alpha - \frac{16}{25} \sin^2 \alpha \leq \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha,$$

$$-\frac{16}{25} \sin^2 \alpha \leq \sin^2 \alpha.$$

Неравенство выполняется для любых  $\alpha$ . Следовательно неявно-разностная схема устойчива для осевой ( $n = 1$ ) и центральной ( $n = 2$ ) симметрии для любых  $\mathcal{R} = \frac{\tau}{h^2}$ . Таким образом устойчивость схемы доказана.

#### Заключение

В заключении следует отметить, что все поставленные задачи были выполнены, цели достигнуты. В ходе данной работы было найдено решение задачи оптимального управления, а именно оптимального управления процессом нагрева диска. Следует отметить, что в данной работе рассматривалась задача о приведении температуры диска к заданной температуре к

$$-\frac{1}{4} \sin^2 \alpha \leq \sin^2 \alpha.$$

Следовательно, для любых  $\alpha$  неявно-разностная схема устойчива для осевой симметрии.

Теперь проверим для центральной симметрии при  $n = 2$ :

конечному моменту времени. Вначале формулировалась постановка задачи исследования, которая заключается в построении решения задачи для определения оптимального управления процессом нагрева диска. Далее приводится построение неявной центрально-разностной схемы, которое сводится к введению безразмерных переменных, что приводит к построению шаблона неявной центрально-разностной схемы, которая представлена на рисунке 3. Затем приводится определение порядка аппроксимации неявной центрально-разностной схемы, где показывается, что погрешность аппроксимации данной схемы имеет второй порядок. После, формулируется и приводится доказательство устойчивости неявно-разностной схемы, где исследуется неявно-разностная схема на устойчивость, для чего мы впоследствии воспользовались необходимым спектральным условием Неймана устойчивости схемы по начальным данным. Затем приводится представление граничных условий в разностном виде, где граничные условия в разностном виде должны также иметь второй порядок аппроксимации. И в конце приводится метод решения задачи оптимального управления, где мы сводим задачу оптимального управления к задаче условной оптимизации.

#### Список литературы

1. Муравей Л.А., Петров В.М. «Некоторые задачи управления диффузионными процессами» - Тез. Всесоюз. Конф. «Актуальные проблемы моделирования и управления системами с распределенными параметрами» - Киев, 1991. - С. 42-43.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. - М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.
3. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. - М.: Издательство «Наука», 1988.
4. Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. - Новосибирск: Научная книга, 1999.
5. Muravey L.A., Petrov V.M. Optimal control of technological process in microelectronics. Interprobor - 90, Moscow, 1990.
6. Самарский А.А. Введение в численные методы. - СПб.: Лань, 2005.
7. Петров В.М., Черноусько Ф.Л. Об определении формы равновесия жидкости под действием сил тяжести и поверхностного натяжения. Изв. АН СССР, Механ. жидкости и газа, 1966, 5, С. 152-156.
8. Костиков Ю.А., Павлов В.Ю., Романенков А.М. Программный комплекс для моделирования колебаний пластин в идеальной жидкости и оптимизации собственных частот. Мониторинг науки и технологий, Мониторинг науки и техники, № 2, 2018.
9. Муравей Л.А., Петров В.М., Романенков А.М. Алгоритм оптимального управления процессом внешнего геттерирования. Вопросы информационных технологий: Международный сборник научных статей. Выпуск I. Липецк: Издательский центр «Гравис», 2014. С. 57-74, ISBN 978-5-4353-0105-2.
10. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: КИНО, Часть III, 2011.
11. Трикоми Ф. Дж. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: - URSS, 2007.
12. Muravey L.A., Petrov V.M., Romanenkov A.M. Modeling and optimization of ion-beam etching process II. Proceedings. International conference on optimization methods and applications (OPTIMA-2013). 2013.
13. Glusa, Christian, and Enrique Otarola. «Optimal control of a parabolic fractional PDE: analysis and discretization» arXiv preprint arXiv: 1905.10002 (2019).

14. Петров В.М., Муравей Л.А., Копылова Т.В. «Задачи моделирования и оптимизации некоторых технологических процессов в микроэлектронике» – Дубна, Вестник Международного университета природы, общества и человек «Дубна», №2(17), декабрь, 2007.

15. Muravey L.A., Petrov V.M., Romanenkov A.M. Modeling and optimization of ion-beam etching process. Proceedings. III International conference on optimization methods and applications (OPTIMA-2012). Costa da Caparica, Portugal, September 23–30, 2012. Edited by VI Zubov., vol. 47, p. 181. 2006.

© С. С. Гусев, Е. Ф. Анисимов

**Ссылка для цитирования:**

Гусев С. С., Анисимов Е. Ф. Численная реализация метода оптимизации для нахождения оптимального управления процессом нагрева диска // Инженерно-строительный вестник Прикаспия : научно-технический журнал / Астраханский государственный архитектурно-строительный университет. Астрахань : ГАОУ АО ВО «АГАСУ», 2021. № 4 (38). С.107–113.

УДК 004.94+711.4+721  
DOI 10.52684/2312-3702-2021-38-4-113-117

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАСТРОЙКИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ  
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ PYTHON В СРЕДЕ 3DS MAX**

**В. И. Жигулин, К. А. Шумилов, А. А. Семенов**

*Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет,  
г. Санкт-Петербург, Россия*

В данной работе представлены результаты разработки алгоритма создания и редактирования трехмерной графики в Autodesk 3ds Max с использованием возможностей высокоуровневого языка программирования Python. На основе полученных результатов появляется возможность моделировать различные варианты квартальной застройки, которые можно использовать как основу BIM-модели при решении задач обучения и проектирования. Распределяются парковые зоны, жилые комплексы и элементы инфраструктуры. По завершению работы алгоритма формируется карта области застройки и ее 3D-модель. В процессе генерации модели с помощью языка Python формируется текстовый документ, содержащий информацию обо всех объектах, что исключает необходимость сохранения самой 3D-модели при каждой случайной генерации. Предлагаемый алгоритм можно использовать для тестовых и учебных заданий, а также возможны различные модификации для использования алгоритма в реальных проектах.

**Ключевые слова:** 3Ds MAX, Python, генерация застройки, алгоритм, градостроительство, проектирование, BIM.

**MODELING AN ARBITRARY BUILDING WITH PYTHON IN THE 3DS MAX ENVIRONMENT**

**V. I. Zhigulin, K. A. Shumilov, A. A. Semenov**

*Saint Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Saint Petersburg, Russia*

This paper presents the results of the development of an algorithm for creating and editing three-dimensional graphics in Autodesk 3ds Max using the capabilities of the high-level programming language Python. Based on the results obtained, it becomes possible to simulate various options for quarterly development, which can be used as a BIM model when solving training and design problems. Park areas, residential complexes and infrastructure elements are distributed. Upon completion of the algorithm, a map of the building area and its 3D model are generated. In the process of generating a model using the Python language, a text document is generated containing information about all objects, which eliminates the need to save the 3D model itself with each random generation. The proposed algorithm can be used for test and educational tasks, and various modifications are also possible for using the algorithm in real projects.

**Keywords:** 3Ds MAX, Python, building generation, algorithm, urban planning, design, BIM.

**Введение**

Современный уровень развития технологий информационного моделирования можно найти, например, в работах [1–5]. С каждым годом программное обеспечение, позволяющее создать информационную модель объекта строительства, охватывает все больше стадий жизненного цикла и отдельных их разделов. Например, увеличивается количество работ, посвященных вопросам стадии эксплуатации [6, 7], что до недавнего времени было большой редкостью.

Помимо «классических» вопросов создания информационных моделей, в настоящее время появляются работы, посвященные генеративному дизайну [8–11].

Так, в работе [8] авторами рассмотрено применение технологии генеративного дизайна для решения задач строительства. Генеративный дизайн рассматривается, как цифровая технология, работающая с другими сквозными цифровыми

технологиями, в том числе с аддитивным производством и искусственный интеллект. Обсуждаются проблемы широкого внедрения технологии, в том числе в процесс информационного моделирования объектов строительства (BIM).

Предложены подходы к решению некоторых задач проектирования, строительства и эксплуатации с применением технологии генеративного дизайна. Сделан вывод, что технологию генеративного дизайна можно использовать в процессе информационного моделирования объекта строительства на всем его жизненном цикле.

Генеративный дизайн является новым подходом к проектированию, при котором человек делегирует часть процессов подбора параметров объекта компьютерным технологиям.

Фактически, это позволяет в автоматическом режиме и с учетом указанных ограничений создавать набор вариантов какого-либо объекта (или группы объектов) в информационной модели. В