

6. Цукерников, И. Е. Решение задач строительной акустики как фактора, обеспечивающего безопасность и комфортность проживания в зданиях / И. Е. Цукерников, Л. А. Тихомиров, Е. О. Соломатин, И. П. Салтыков, Н. А. Кочкин // Жилищное строительство. – 2014. – № 6. – С. 49–52.
7. Пороженко, М. А. Изоляция ударного шума ограждающими конструкциями здания / М. А. Пороженко // Бюллетень строительной техники. – 2018. – № 6 (1006). – С. 34–35.
8. Горин, В. А. Исследование звукоизоляции многослойных междуэтажных перекрытий / В. А. Горин, В. В. Клименко, М. А. Пороженко // Строительство и реконструкция. – 2018. – № 3 (77). – С. 46–51.
9. Sound Insulation of Buildings. – Режим доступа: [ivilengineeringbible.com/article.php?i=133](http://ivilengineeringbible.com/article.php?i=133).
10. Шубин, И. Л. Звукоизоляция ограждающих конструкций в многоэтажных зданиях. Требования и методы обеспечения / И. Л. Шубин, В. А. Аистов, М. А. Пороженко // Строительные материалы. – 2019. – № 3. – С. 33–43. – DOI: 10.31659/0585-430X-2019-768-3-33-43.
11. How to Soundproof an Apartment: 9 Tips and Tricks. – Режим доступа: [apartmentlist.com/renter-life/how-to-soundproof-an-apartment](http://apartmentlist.com/renter-life/how-to-soundproof-an-apartment) (дата обращения 13.04.2022).

© К. А. Гуреев, Д. В. Трясцин

**Ссылка для цитирования:**

Гуреев К. А., Трясцин Д. В. Способы повышения звукоизоляции в домах, построенных по монолитно-каркасной технологии // Инженерно-строительный вестник Прикаспия : научно-технический журнал / Астраханский государственный архитектурно-строительный университет. Астрахань : ГАОУ АО ВО «АГАСУ», 2022. № 2 (40). С. 31–36.

УДК 621.979.1

DOI 10.52684/2312-3702-2022-40-2-36-41

## МОДИФИКАЦИЯ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КИНЕМАТИЧЕСКОГО И ДИНАМИЧЕСКОГО АНАЛИЗА МЕХАНИЗМОВ

*О. А. Хохлова, Е. В. Пономарева, А. В. Синельщиков*

**Хохлова Ольга Александровна**, кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика и инженерная графика», Астраханский государственный технический университет, г. Астрахань, Российская Федерация; e-mail: [zaphy@yandex.ru](mailto:zaphy@yandex.ru);

**Пономарева Елена Владимировна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Механика и инженерная графика», Астраханский государственный технический университет, г. Астрахань, Российская Федерация; e-mail: [internet@astu.org](mailto:internet@astu.org);

**Синельщиков Алексей Владимирович**, кандидат технических наук, доцент кафедры промышленного и гражданского строительства, Астраханский государственный архитектурно-строительный университет, г. Астрахань, Российская Федерация; e-mail: [laex@bk.ru](mailto:laex@bk.ru)

Разработана методика динамических исследований механизма переменной структуры с учетом реального положения центров масс и инерционных характеристик круговых звеньев. Подготовлена математическая модель исполнительного механизма с комбинированным шатуном. Предложен алгоритм численного метода решения задач кинематического и динамического анализа механизма переменной структуры, в котором связи учитываются «естественным» способом путем построения парциальных систем механизма, используя уравнения Лагранжа второго рода. Получена функция одной из обобщенных координат  $\varphi$  и двух ее производных  $\omega_1$  и  $\varepsilon_1$ , проведено сравнение результатов с решением, полученным в программном комплексе ADAMS/Solver. Проведенные исследования базируются на известных в механике машин методах анализа механизмов. Решение дифференциальных уравнений движения исполнительного механизма переменной структуры пресса с комбинированным шатуном и экспериментальной установки проводились на ЭВМ численным методом Рунге – Кутты.

**Ключевые слова:** численный метод решения, метод интегрирования, метод линейного ускорения, механизм переменной структуры, численный динамический анализ, уравнения Лагранжа, парциальная система, обобщенная координата, обобщенная сила.

## MODIFICATION OF THE NUMERICAL METHOD FOR SOLVING PROBLEMS OF KINEMATIC AND DYNAMIC ANALYSIS OF MECHANISMS

*O. A. Khokhlova, Ye. V. Ponomareva, A. V. Sinelshchikov*

**Khokhlova Olga Aleksandrovna**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Mechanics and Engineering Graphics, Astrakhan State Technical University, Astrakhan, Russian Federation; e-mail: [zaphy@yandex.ru](mailto:zaphy@yandex.ru);

**Ponomareva Yelena Vladimirovna**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Mechanics and Engineering Graphics, Astrakhan State Technical University, Astrakhan, Russian Federation; e-mail: [internet@astu.org](mailto:internet@astu.org);

**Sinelshchikov Aleksey Vladimirovich**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Industrial and Civil Engineering, Astrakhan State University of Architecture and Civil Engineering, Astrakhan, Russian Federation; e-mail: [la\\_41@bk.ru](mailto:la_41@bk.ru)

A method of dynamic studies of the mechanism of variable structure (MPS) has been developed taking into account the real position of the centers of mass and the inertial characteristics of circular links. A mathematical model of the MPC executive mechanism with a combined connecting rod has been developed. An algorithm of a numerical method for solving problems of kinematic and dynamic analysis of MPS is proposed, in which connections are taken into account in a "natural" way by constructing partial systems of mechanisms using Lagrange equations of the 2nd kind. A function of one of the generalized coordinates  $\varphi$  and its two derivatives  $\omega_1$  and  $\varepsilon_1$  is obtained, the results are compared with the solution obtained in the ADAMS/Solver software package. The conducted research is based on the methods of mechanism analysis known in the mechanics of machines. The differential equations of motion of the actuator of a variable structure of a press with a combined connecting rod and an experimental installation were solved on a computer by the numerical Runge-Kutta method.

**Keywords:** numerical solution method, integration method, linear acceleration method, variable structure mechanism, numerical dynamic analysis, Lagrange equations, partial system, generalized coordinate, generalized force.

Один из этапов расчетного анализа строительных конструкций связан со сбором нагрузок от установленных в здании стационарных машин и оборудования. Сбор нагрузок от собственного веса оборудования не представляет сложности, однако если механизм является источником динамического нагружения, то однозначность нагружения возможно установить только в случае механизмов с постоянной структурой. В этом случае характеристики кинематического и динамического нагружения со стороны оборудования остаются постоянными в течение всего периода их работы. Механизмы с переменной структурой (МПС) создают динамическое воздействие, состоящее из участков, имеющих разные кинематические и динамические характеристики. При этом переключение из одного режима работы МПС в другой происходит в течение короткого промежутка времени с возникновением переходных процессов. Формирование нагружения на здание от работающего МПС возможно только по результатам кинематического и динамического анализа МПС. Решение этой актуальной задачи до настоящего времени представляет собой определенную вычислительную трудность.

Целью настоящей работы является повышение точности расчета строительных конструкций путем уточнения нагружения на него от

МПС. Авторы работы поставили и решили следующие задачи:

- 1) анализ особенностей нагружения МПС;
- 2) разработку математической модели работы МПС;
- 3) проведение численного моделирования с использованием данной модели.

В работе предложен алгоритм численного решения задач кинематического и динамического анализа МПС, который отличается от семейства наиболее широко используемых методов. Предложено учитывать связи «естественным» способом, строя парциальные системы механизма, используя уравнения Лагранжа второго рода.

Рассмотрим предлагаемый алгоритм на примере кривошипно-коромыслового механизма с двумя степенями свободы (рис. 1). Алгоритм решения может быть распространен на другие механизмы со склерономными связями и большим числом степеней свободы. Проведенные исследования базируются на известных в механике машин методах анализа механизмов, применены методы математического моделирования. Решение дифференциальных уравнений движения исполнительного МПС пресса с комбинированным шатуном и экспериментальной установки проводилось на ЭВМ численным методом Рунге – Кутты.

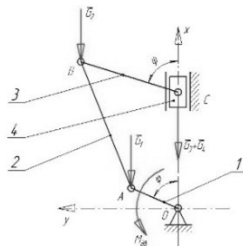


Рис. 1. Кривошипно-коромысловый механизм с двумя степенями свободы:

1 – кривошип, 2 – шатун, 3 – коромысло, 4 – ползун

Исследуемый механизм лежит в основе безмуфтового кривошипного пресса [1], основными звеньями которого являются кривошип 1, шатун 2, коромысло 3, ползун 4. На рисунке 1 изображен стержневой аналог этого дискового механизма, у которого звенья 1–3 расположены внутри ползуна 4. На рисунке 2 представлен дисковый исполнительный механизм пресса в схематичном виде, работающий следующим образом. В исходном положении при холостых режимах ползун 4 удерживается в верхнем положении с помощью упругих элементов. Кривошипный вал 1, эксцентриковый шатун 2 и шатун 3 представляют собой обычный шарнирный четырехзвенник, у которого центр кривошипного вала 1 совпадает с центром кинематической пары шатун – коромысло, а центр шатуна 3 – с центром пары коромысло – ползун.

Вращение кривошипного вала 1 преобразуется через шатун 2 в качательное движение коромысла

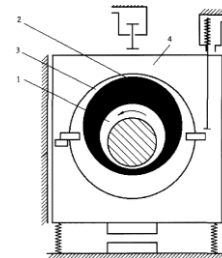


Рис. 2. Безмуфтовый механический пресс:

1 – кривошипный вал; 2 – эксцентриковый шатун; 3 – шатун; 4 – ползун

3, ползун 4 находится в состоянии покоя. При переходе на рабочий режим в пневмоцилиндр включения подается сжатый воздух, при этом ползун 4 перемещается вниз на величину 1–2 мм. Вследствие этого нарушается геометрическое соотношение шарнирно-четырёхзвенного механизма с качающимся коромыслом 3. Изменяется угол качания коромысла 3 до вертикального положения, происходит его замыкание на ползуне 4, т. е. исключается движение звена 3 относительно звена 4. В дальнейшем устройство превращается в кривошипно-ползунный механизм. При повороте кривошипного вала 1 шатун 2 перемещает вниз коромысло 3 вместе с ползуном 4, пресс начинает работать в рабочем режиме. При переводе пресса на холостой режим включается пневмоцилиндр отключения, шток которого проворачивает коромысло 3. Звено 3 освобождается, ползун 4 поднимается до исходного положения. Коромысло 3 начинает качаться

при вращении кривошипного вала 1, пресс переходит на холостой режим работы.

Для кинематического и динамического анализа механизмов с несколькими степенями свободы была разработана следующая методика:

1. Выбираем в качестве обобщенных координат углы поворотов  $\varphi, \psi$  звеньев 1 и 3.

2. Предположим, что положения узловых точек  $(A, B, C)$  исследуемого механизма известны и удовлетворяют соотношениям (1)–(3). Выразим радиусы-векторы точек  $A, B, C$ , как функции обобщенных координат:

$$\begin{aligned} \{r_A\}(\varphi) &= \begin{Bmatrix} l_1 \cdot \cos(\varphi) \\ l_1 \cdot \sin(\varphi) \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \{r_B\}(\varphi, \psi) = \begin{Bmatrix} x_B(\varphi, \psi) \\ y_B(\psi) \\ 0 \end{Bmatrix}, \\ \{r_C\}(\varphi, \psi) &= \begin{Bmatrix} x_C(\varphi, \psi) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad (1)$$

Координаты точек  $A$  и  $B$  связаны между собой уравнением связи:

$$(\{r_B\} - \{r_A\})(\varphi)^T \cdot (\{r_B\} - \{r_A\})(\varphi) = l_2^2, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} &\left( \begin{Bmatrix} x_B(\varphi, \psi) \\ l_3 \cdot \sin(\psi) \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} l_1 \cdot \cos(\varphi) \\ l_1 \cdot \sin(\varphi) \\ 0 \end{Bmatrix} \right)^T \times \\ &\times \left( \begin{Bmatrix} x_B(\varphi, \psi) \\ l_3 \cdot \sin(\psi) \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} l_1 \cdot \cos(\varphi) \\ l_1 \cdot \sin(\varphi) \\ 0 \end{Bmatrix} \right) = l_2^2, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $y_B(\psi) = l_3 \cdot \sin(\psi)$ ,  $x_C(\varphi, \psi) = x_B(\varphi, \psi) - l_3 \cdot \cos(\psi)$ .

Уравнение (3) позволяет получить два решения (два численных значения  $x_B$ ), соответствующих различным «сборкам» данного механизма.

3. Представим радиус-векторы точек  $A, B$  и  $C$  в виде соответствующих функций, определяющих численные значения координат этих векторов по вводимым численным значениям обобщенных координат  $\varphi, \psi$ :

$$\{r_A\}(\varphi), \quad \{r_B\}(\varphi, \psi), \quad \{r_C\}(\varphi, \psi). \quad (4)$$

Парциальной системой 1 (ПС1) (см. рис. 3) назовем механическую систему, которая получается из системы, показанной на рисунке 1, «замораживанием» обобщенной координаты  $\psi$ ; парциальной системой 2 (ПС2) (см. рис. 4) – механическую систему, полученную «замораживанием» обобщенной координаты  $\varphi$ .

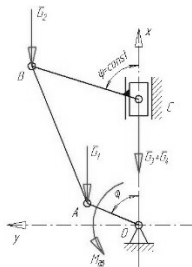


Рис. 3. Парциальная система 1

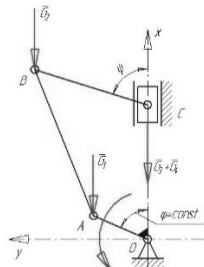


Рис. 4. Парциальная система 2

Определение аналогов скоростей в парциальной системе 1.

1. Частную производную радиуса-вектора точки  $A$  по обобщенной координате  $\varphi$  назовем аналогом скорости точки  $A$  в ПС1:

$$\{v_{A_\varphi}^*\} = \frac{\partial \{r_A\}}{\partial \varphi}, \quad (5)$$

его конечно-разностный аналог определим с помощью центральной разности:

$$\{v_{A_\varphi}^*\}(\varphi) \approx \frac{\delta \{r_A\}}{\delta \varphi} = \frac{\{r_A\}(\varphi + \Delta\varphi) - \{r_A\}(\varphi - \Delta\varphi)}{2 \cdot \Delta\varphi}, \quad (6)$$

где  $\Delta\varphi$  - дискретное виртуальное перемещение.

2. Аналоги скоростей остальных точек механизма в ПС1 и ПС2:

$$\{v_{B_\varphi}^*\}(\varphi, \psi) = \frac{\{r_B\}(\varphi + \Delta\varphi, \psi) - \{r_B\}(\varphi - \Delta\varphi, \psi)}{2 \cdot \Delta\varphi}, \quad (7)$$

$$\{v_{C_\varphi}^*\}(\varphi, \psi) = \frac{\{r_C\}(\varphi + \Delta\varphi, \psi) - \{r_C\}(\varphi - \Delta\varphi, \psi)}{2 \cdot \Delta\varphi}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \{\omega_{2_\varphi}^*\}(\varphi, \psi) &= \frac{1}{\{AB\}(\varphi, \psi)^T \cdot \{AB\}(\varphi, \psi)} \times \\ &\times \{AB\}(\varphi, \psi) \times \{v_{BA_\varphi}^*\}(\varphi, \psi). \end{aligned} \quad (9)$$

3. Представим рассмотренные аналоги скоростей в виде соответствующих функций, определяющих численные значения координат этих векторов по вводимым численным значениям обобщенных координат  $\varphi, \psi$ :

$$\begin{aligned} \{v_{A_\varphi}^*\}(\varphi), \quad \{v_{B_\varphi}^*\}(\varphi, \psi), \quad \{v_{C_\varphi}^*\}(\varphi, \psi), \dots; \\ \{\omega_{2_\varphi}^*\}(\varphi, \psi), \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Каждая из функций (10), определяющих аналоги скоростей, будет использовать (4), определяющие радиусы-векторы.

Определение аналогов скоростей в парциальной системе 2.

1. Частную производную радиуса-вектора точки  $B$  по обобщенной координате  $\psi$  назовем аналогом скорости точки  $B$  в ПС2:

$$\{v_{B_\psi}^*\} = \frac{\partial \{r_B\}}{\partial \psi}. \quad (11)$$

Его конечно-разностный аналог в точке  $(\varphi, \psi)$  определим с помощью центральной разности по  $\psi$ :

$$\{v_{B_\psi}^*\}(\varphi, \psi) \approx \frac{\delta \{r_B\}}{\delta \psi} = \frac{\{r_B\}(\varphi, \psi + \Delta\psi) - \{r_B\}(\varphi, \psi - \Delta\psi)}{2 \cdot \Delta\psi}. \quad (12)$$

2. Аналоги скорости точки  $C$  и угловых скоростей звеньев в ПС2:

$$\{v_{C_\psi}^*\}(\varphi, \psi) = \frac{\{r_C\}(\varphi, \psi + \Delta\psi) - \{r_C\}(\varphi, \psi - \Delta\psi)}{2 \cdot \Delta\psi}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \{\omega_{2_\psi}^*\}(\varphi, \psi) &= \frac{1}{\{AB\}(\varphi, \psi)^T \cdot \{AB\}(\varphi, \psi)} \times \\ &\times \{AB\}(\varphi, \psi) \times \{v_{BA_\psi}^*\}(\varphi, \psi), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \{\omega_{3_\psi}^*\}(\varphi, \psi) &= \frac{1}{\{BC\}(\varphi, \psi)^T \cdot \{BC\}(\varphi, \psi)} \times \\ &\times \{BC\}(\varphi, \psi) \times \{v_{CB_\psi}^*\}(\varphi, \psi). \end{aligned} \quad (15)$$

3. Представим рассмотренные аналоги скоростей в виде соответствующих функций, выдающих численные значения координат этих векторов по вводимым численным значениям обобщенных координат  $\varphi, \psi$ :

$$\begin{aligned} \{v_{B_\psi}^*\}(\varphi, \psi), \quad \{v_{C_\psi}^*\}(\varphi, \psi), \dots; \\ \{\omega_{2_\psi}^*\}(\varphi, \psi), \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Определяем линейные скорости точек базовых точек  $A, B$  и  $C$ :

$$\{v_A\}(\phi, \dot{\phi}) \approx \frac{\delta\{r_A\}}{\delta\phi} \cdot \dot{\phi} = \{v_{A,\phi}^*\}(\phi) \cdot \dot{\phi}. \quad (17)$$

$$\{v_B\}(\phi, \psi, \dot{\phi}, \dot{\psi}) = \{v_{B,\phi}^*\}(\phi, \psi) \cdot \dot{\phi} + \{v_{B,\psi}^*\}(\phi, \psi) \cdot \dot{\psi},$$

$$\{v_B\}(\phi, \psi, \dot{\phi}, \dot{\psi}) = \{v_B\}(q_i, \dot{q}_i). \quad (18)$$

$$\{v_C\}(q_i, \dot{q}_i) = \{v_{C,\phi}^*\}(\phi, \psi) \cdot \dot{\phi} + \{v_{C,\psi}^*\}(\phi, \psi) \cdot \dot{\psi}. \quad (19)$$

Находим угловые скорости звеньев 1-3:

$$\{\omega_1\}(\dot{q}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \dot{\phi}, \quad \{\omega_2\}(q_i, \dot{q}_i) = \{\omega_{2,\phi}^*\}(\phi, \psi) \times$$

$$\times \dot{\phi} + \{\omega_{2,\psi}^*\}(\phi, \psi) \cdot \dot{\psi},$$

$$\{\omega_3\}(q_i, \dot{q}_2) = \{\omega_{3,\psi}^*\}(\phi, \psi) \cdot \dot{\psi}. \quad (20)$$

Рассчитаем кинетическую энергию рассматриваемого механизма как сумму кинетических энергий  $T_1, \dots, T_4$  его звеньев 1-4:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = \frac{1}{2} \cdot J_{\phi,\phi} \cdot \dot{\phi}^2 + J_{\phi,\psi} \cdot \dot{\phi} \times$$

$$\times \dot{\psi} + \frac{1}{2} \cdot J_{\psi,\psi} \cdot \dot{\psi}^2, \quad (21)$$

$$T_1 = \frac{m_1}{2} \cdot \{v_A\}^T \cdot \{v_A\} + \frac{J_1}{2} \cdot \{\omega_1\}^T \times$$

$$\times \{\omega_1\} = \frac{1}{2} \cdot J_{\phi,\phi,1} \cdot \dot{\phi}^2,$$

$$T_2 = \frac{m_2}{2} \cdot \{v_B\}^T \cdot \{v_B\} + \frac{J_2}{2} \cdot \{\omega_2\}^T \times$$

$$\times \{\omega_2\} = \frac{1}{2} \cdot J_{\phi,\phi,2} \cdot \dot{\phi}^2 + J_{\phi,\psi,2} \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\psi} +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot J_{\psi,\psi,2} \cdot \dot{\psi}^2,$$

$$T_3 = \frac{m_3}{2} \cdot \{v_C\}^T \cdot \{v_C\} + \frac{J_3}{2} \cdot \{\omega_3\}^T \times$$

$$\times \{\omega_3\} = \frac{1}{2} \cdot J_{\phi,\phi,3} \cdot \dot{\phi}^2 + J_{\phi,\psi,3} \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\psi} +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot J_{\psi,\psi,3} \cdot \dot{\psi}^2,$$

$$T_4 = \frac{m_4}{2} \cdot \{v_C\}^T \cdot \{v_C\} = \frac{1}{2} \cdot J_{\phi,\phi,4} \cdot \dot{\phi}^2 +$$

$$+ J_{\phi,\psi,4} \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\psi} + \frac{1}{2} \cdot J_{\psi,\psi,4} \cdot \dot{\psi}^2,$$

где  $J_{\phi,\phi} = J_{\phi,\phi}(\phi, \psi), \quad J_{\phi,\psi} = J_{\phi,\psi}(\phi, \psi),$   
 $J_{\psi,\psi} = J_{\psi,\psi}(\phi, \psi)$  - приведенные к обобщенным скоростям моменты инерции механизма:

$$J_{\phi,\phi} = J_{\phi,\phi,1} + J_{\phi,\phi,2} + J_{\phi,\phi,3} + J_{\phi,\phi,4}, \quad (22)$$

$$J_{\phi,\psi} = J_{\phi,\psi,2} + J_{\phi,\psi,3} + J_{\phi,\psi,4}, \quad (23)$$

$$J_{\psi,\psi} = J_{\psi,\psi,2} + J_{\psi,\psi,3} + J_{\psi,\psi,4}, \quad (24)$$

$J_{\phi,\phi,1} = m_1 \cdot \{v_{A,\phi}^*\}^T \cdot \{v_{A,\phi}^*\} + J_1$  - приведенный к квадрату обобщенной скорости  $\dot{\phi}^2$  момент инерции кривошипа.

Введем следующие обозначения и выразим  $T$ :

$$A_{11} = J_{\phi,\phi}, \quad A_{12} = J_{\phi,\psi}, \quad A_{22} = J_{\psi,\psi},$$

$$q_1 = \phi, \quad q_2 = \psi, \quad Q_\phi = Q_1, \quad Q_\psi = Q_2,$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = \frac{1}{2} \cdot A_{11} \cdot \dot{q}_1^2 +$$

$$\left\{ \begin{aligned} &A_{11} \cdot \ddot{q}_1 + A_{12} \cdot \ddot{q}_2 + \frac{1}{2} \cdot A_{11,1} \cdot \dot{q}_1^2 + A_{11,2} \cdot \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2 + \left( A_{12,2} - \frac{1}{2} \cdot A_{22,1} \right) \cdot \dot{q}_2^2 = Q_1, \\ &A_{12} \cdot \ddot{q}_1 + A_{22} \cdot \ddot{q}_2 + \left( A_{12,1} - \frac{1}{2} \cdot A_{11,2} \right) \cdot \dot{q}_1^2 + A_{22,1} \cdot \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2 + \frac{1}{2} \cdot A_{22,2} \cdot \dot{q}_2^2 = Q_2 \end{aligned} \right. \quad (35)$$

$$+ A_{12} \cdot \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2 + \frac{1}{2} \cdot A_{22} \cdot \dot{q}_2^2 \quad (25)$$

Определение обобщенных сил.

1. Работы внешних сил на возможных перемещениях  $2 \cdot \Delta\phi$  и  $2 \cdot \Delta\psi$  соответственно равны:

$$\Delta A_\phi = \{G_1\}^T \cdot [\{r_A\}(\phi + \Delta\phi) - \{r_A\}(\phi - \Delta\phi)] + \{G_2\}^T \times$$

$$\times [\{r_B\}(\phi + \Delta\phi, \psi) - \{r_B\}(\phi - \Delta\phi, \psi)] +$$

$$+ (\{G_3\} + \{G_4\})^T \cdot [\{r_C\}(\phi + \Delta\phi, \psi) - \{r_C\}(\phi - \Delta\phi, \psi)] +$$

$$+ M_{\partial\phi} \cdot 2 \cdot \Delta\phi,$$

$$\Delta A_\psi = \{G_2\}^T \cdot [\{r_B\}(\phi, \psi + \Delta\psi) - \{r_B\}(\phi, \psi - \Delta\psi)] +$$

$$+ (\{G_3\} + \{G_4\})^T \cdot [\{r_C\}(\phi, \psi + \Delta\psi) - \{r_C\}(\phi, \psi - \Delta\psi)]. \quad (27)$$

2. Обобщенные силы в ПС1 и в ПС2 равны:

$$Q_\phi = \frac{\Delta A_\phi}{2 \cdot \Delta\phi} = \{G_1\}^T \cdot \frac{[\{r_A\}(\phi + \Delta\phi) - \{r_A\}(\phi - \Delta\phi)]}{2 \cdot \Delta\phi} +$$

$$\{G_2\}^T \cdot \frac{[\{r_B\}(\phi + \Delta\phi, \psi) - \{r_B\}(\phi - \Delta\phi, \psi)]}{2 \cdot \Delta\phi} +$$

$$+ (\{G_3\} + \{G_4\})^T \cdot \frac{[\{r_C\}(\phi + \Delta\phi, \psi) - \{r_C\}(\phi - \Delta\phi, \psi)]}{2 \cdot \Delta\phi} + M_{\partial\phi},$$

$$Q_\phi = \{G_1\}^T \cdot \{v_{A,\phi}^*\}(\phi) + \{G_2\}^T \times$$

$$\times \{v_{B,\phi}^*\}(\phi, \psi) + (\{G_3\} + \{G_4\})^T \times$$

$$\times \{v_{C,\phi}^*\}(\phi, \psi) + M_{\partial\phi}, \quad (28)$$

$$Q_\psi = \{G_2\}^T \cdot \{v_{B,\psi}^*\}(\phi, \psi) +$$

$$+ (\{G_3\} + \{G_4\})^T \cdot \{v_{C,\psi}^*\}(\phi, \psi). \quad (29)$$

Запишем уравнения Лагранжа второго рода [2, 3]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) - \left( \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) = Q_\phi, \quad \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) - \left( \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) = Q_\psi. \quad (30)$$

Введем обозначения:

$$A_{12,1}(q_1, q_2) = A_{12,1}(\phi, \psi) = \left( \frac{\partial A_{12}}{\partial q_1} \right) \Big|_{\psi = \psi} =$$

$$= \frac{A_{12}(\phi + \Delta\phi, \psi) - A_{12}(\phi - \Delta\phi, \psi)}{2 \cdot \Delta\phi},$$

$$A_{12,1} = f(\phi - 2 \cdot \Delta\phi, \phi - \Delta\phi, \phi, \phi + \Delta\phi,$$

$$\phi + 2 \cdot \Delta\phi, \psi - \Delta\psi, \psi, \psi + \Delta\psi). \quad (31)$$

Из (31) следует:

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = A_{11} \cdot \dot{q}_1 + A_{12} \cdot \dot{q}_2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = A_{12} \cdot \dot{q}_1 + A_{22} \cdot \dot{q}_2; \quad (32)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{1}{2} \cdot A_{11,1} \cdot \dot{q}_1^2 + A_{12,1} \cdot \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2 + \frac{1}{2} \cdot A_{22,1} \cdot \dot{q}_2^2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{1}{2} \cdot A_{11,2} \cdot \dot{q}_1^2 + A_{12,2} \cdot \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2 + \frac{1}{2} \cdot A_{22,2} \cdot \dot{q}_2^2; \quad (33)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) = A_{11} \cdot \ddot{q}_1 + A_{12} \cdot \ddot{q}_2 +$$

$$+ (A_{11,1} \cdot \dot{q}_1 + A_{12,1} \cdot \dot{q}_2) \cdot \dot{q}_1 +$$

$$+ (A_{11,2} \cdot \dot{q}_1 + A_{12,2} \cdot \dot{q}_2) \cdot \dot{q}_2,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) = A_{12} \cdot \ddot{q}_1 + A_{22} \cdot \ddot{q}_2 +$$

$$+ (A_{12,1} \cdot \dot{q}_1 + A_{22,1} \cdot \dot{q}_2) \cdot \dot{q}_1 +$$

$$+ (A_{12,2} \cdot \dot{q}_1 + A_{22,2} \cdot \dot{q}_2) \cdot \dot{q}_2, \quad (34)$$

Уравнения Лагранжа второго рода (30) после подстановки формул (32)-(34) и приведения подобных примут вид:

В системе (35) коэффициенты  $A_{ij}$  зависят от обобщенных координат (т. к. геометрические и инерционные параметры механизма принимаются неизменными), коэффициенты  $A_{ijk}$  являются частными производными от функций  $A_i$ . Обобщенные силы  $Q_1$  и  $Q_2$  могут быть как функциями обобщенных координат, так и функциями времени. Таким образом, система (35) представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных, в которой  $A_{ij}$  и  $A_{ijk}$  таблично заданные функции, зависящие от обобщенных координат. При заданном положении механизма можно найти значения всех коэффициентов  $A_{ij}$  и  $A_{ijk}$  и, подставив их в (35), получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений для достаточно малого шага времени. В течение этого времени величины  $A_{ij}$  и  $A_{ijk}$  можно считать постоянными.

Тогда уравнения (35) примут вид:

$$[A] \cdot \{\dot{q}\} + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \{\dot{q}\}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \{\dot{q}\}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [B] \\ [C] \end{bmatrix} \cdot \{q\} = \{Q\},$$

где  $[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ ,  $[B] = \begin{bmatrix} A_{11,1} & A_{11,2} \\ A_{11,2} & 2 \cdot \left( A_{12,2} - \frac{1}{2} \cdot A_{22,1} \right) \end{bmatrix}$ ,  
 $[C] = \begin{bmatrix} 2 \cdot \left( A_{12,1} - \frac{1}{2} \cdot A_{11,2} \right) & A_{22,1} \\ A_{22,1} & A_{22,2} \end{bmatrix}$ ,  $\{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}$ ,  $\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$ ,  
 $\{\dot{q}\} = \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix}$ ,  $\{\ddot{q}\} = \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix}$ .

Выразим вектор обобщенных ускорений:

$$\{\ddot{q}\} = [A]^{-1} \cdot \left( \{Q\} - \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \{\dot{q}\}^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \{\dot{q}\}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [B] \\ [C] \end{bmatrix} \cdot \{q\} \right) \quad (36)$$

Уравнение (36) представляет собой формулу для получения обобщенных ускорений непосредственным обращением матрицы  $[A]$ . Оно может быть использовано при небольшом количестве обобщенных координат (степеней свободы) для определения  $\ddot{\varphi}$ ,  $\ddot{\psi}$  по известным значениям  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\dot{\varphi}$ ,  $\dot{\psi}$ ,  $t$ :

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} = \ddot{\varphi}(\varphi, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, t), \\ \ddot{\psi} = \ddot{\psi}(\varphi, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\psi}, t). \end{cases} \quad (37)$$

Алгоритм определения  $\ddot{\varphi}_i$  и  $\ddot{\psi}_i$  в точках  $t = t_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N$  сводится к следующему.

1. Зная обобщенные скорости  $\dot{\varphi}_i$ ,  $\dot{\psi}_i$  и координаты  $\varphi_i$ ,  $\psi_i$  при  $t = t_i$ , определим обобщенные ускорения  $\ddot{\varphi}_i$ ,  $\ddot{\psi}_i$  в тот же момент времени из дифференциальных уравнений движения механической системы:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_i = \ddot{\varphi}(\varphi_i, \psi_i, \dot{\varphi}_i, \dot{\psi}_i), \\ \ddot{\psi}_i = \ddot{\psi}(\varphi_i, \psi_i, \dot{\varphi}_i, \dot{\psi}_i). \end{cases}$$

2. Предположим в первом приближении, что при  $t = \tau \in [t_i, t_{i+1}]$  обобщенные ускорения  $\ddot{\varphi}$ ,  $\ddot{\psi}$  не изменяются:

$$\ddot{\varphi}^{(1)}(\tau) = \ddot{\varphi}_{i+1}^{(1)} = \ddot{\varphi}_i, \quad \ddot{\psi}^{(1)}(\tau) = \ddot{\psi}_{i+1}^{(1)} = \ddot{\psi}_i.$$

Тогда обобщенные скорости и координаты в конце шага интегрирования будут равны:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_{i+1}^{(1)} = \dot{\varphi}_i + \ddot{\varphi}_i \cdot \Delta t, \\ \dot{\psi}_{i+1}^{(1)} = \dot{\psi}_i + \ddot{\psi}_i \cdot \Delta t, \end{cases} \quad (38)$$

$$\begin{cases} \varphi_{i+1}^{(1)} = \varphi_i + \dot{\varphi}_i \cdot \Delta t + \ddot{\varphi}_i \cdot \frac{\Delta t^2}{2}, \\ \psi_{i+1}^{(1)} = \psi_i + \dot{\psi}_i \cdot \Delta t + \ddot{\psi}_i \cdot \frac{\Delta t^2}{2}. \end{cases} \quad (39)$$

3. Предсказав обобщенные скорости  $\dot{\varphi}_{i+1}^{(1)}$ ,  $\dot{\psi}_{i+1}^{(1)}$  и координаты  $\varphi_{i+1}^{(1)}$ ,  $\psi_{i+1}^{(1)}$  в конце шага интегрирования (при  $t = t_{i+1}$ ), определим обобщенные ускорения  $\ddot{\varphi}_{i+1}^{(2)}$ ,  $\ddot{\psi}_{i+1}^{(2)}$  в тот же момент времени из дифференциальных уравнений движения механической системы:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_{i+1}^{(2)} = \ddot{\varphi}(\varphi_{i+1}^{(1)}, \psi_{i+1}^{(1)}, \dot{\varphi}_{i+1}^{(1)}, \dot{\psi}_{i+1}^{(1)}), \\ \ddot{\psi}_{i+1}^{(2)} = \ddot{\psi}(\varphi_{i+1}^{(1)}, \psi_{i+1}^{(1)}, \dot{\varphi}_{i+1}^{(1)}, \dot{\psi}_{i+1}^{(1)}). \end{cases} \quad (40)$$

Используя метод линейного ускорения, предположим, что при  $t = \tau \in [t_i, t_{i+1}]$  обобщенные ускорения  $\ddot{\varphi}$ ,  $\ddot{\psi}$  изменяются по линейному закону [4-7]:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}^{(2)}(\tau) = \ddot{\varphi}_i + \frac{\ddot{\varphi}_{i+1}^{(2)} - \ddot{\varphi}_i}{\Delta t} \cdot \tau, \\ \ddot{\psi}^{(2)}(\tau) = \ddot{\psi}_i + \frac{\ddot{\psi}_{i+1}^{(2)} - \ddot{\psi}_i}{\Delta t} \cdot \tau. \end{cases} \quad (41)$$

Проинтегрируем уравнения (41):

$$\begin{cases} \dot{\varphi}^{(2)}(\tau) = \dot{\varphi}_i + \ddot{\varphi}_i \cdot \tau + \frac{\ddot{\varphi}_{i+1}^{(2)} - \ddot{\varphi}_i}{2} \cdot \frac{\tau^2}{\Delta t}, \\ \dot{\psi}^{(2)}(\tau) = \dot{\psi}_i + \ddot{\psi}_i \cdot \tau + \frac{\ddot{\psi}_{i+1}^{(2)} - \ddot{\psi}_i}{2} \cdot \frac{\tau^2}{\Delta t}. \end{cases} \quad (42)$$

$$\begin{cases} \varphi^{(2)}(\tau) = \varphi_i + \dot{\varphi}_i \cdot \tau + \ddot{\varphi}_i \cdot \frac{\tau^2}{2} + \frac{\ddot{\varphi}_{i+1}^{(2)} - \ddot{\varphi}_i}{6} \cdot \frac{\tau^3}{\Delta t}, \\ \psi^{(2)}(\tau) = \psi_i + \dot{\psi}_i \cdot \tau + \ddot{\psi}_i \cdot \frac{\tau^2}{2} + \frac{\ddot{\psi}_{i+1}^{(2)} - \ddot{\psi}_i}{6} \cdot \frac{\tau^3}{\Delta t}. \end{cases} \quad (43)$$

Вычислим по формулам (42) и (43) обобщенные скорости и координаты в конце шага интегрирования:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_{i+1}^{(2)} = \dot{\varphi}_i + \ddot{\varphi}_i \cdot \Delta t + \left( \ddot{\varphi}_{i+1}^{(2)} - \ddot{\varphi}_i \right) \cdot \frac{\Delta t}{2}, \\ \dot{\psi}_{i+1}^{(2)} = \dot{\psi}_i + \ddot{\psi}_i \cdot \Delta t + \left( \ddot{\psi}_{i+1}^{(2)} - \ddot{\psi}_i \right) \cdot \frac{\Delta t}{2}. \end{cases} \quad (44)$$

$$\begin{cases} \varphi_{i+1}^{(2)} = \varphi_i + \dot{\varphi}_i \cdot \Delta t + \ddot{\varphi}_i \cdot \frac{\Delta t^2}{2} + \left( \ddot{\varphi}_{i+1}^{(2)} - \ddot{\varphi}_i \right) \cdot \frac{\Delta t^2}{6}, \\ \psi_{i+1}^{(2)} = \psi_i + \dot{\psi}_i \cdot \Delta t + \ddot{\psi}_i \cdot \frac{\Delta t^2}{2} + \left( \ddot{\psi}_{i+1}^{(2)} - \ddot{\psi}_i \right) \cdot \frac{\Delta t^2}{6}. \end{cases} \quad (45)$$

Для проверки предложенного алгоритма проведен динамический анализ механизма с использованием следующих геометрических, инерционных и силовых параметров для безмуфтового механического прессы – длины звеньев, мм:  $l_1 = 15$ ,  $l_2 = 40$ ,  $l_3 = 30$ ; массы звеньев, кг:  $m_1 = 4,6$ ,  $m_2 = 20$ ,  $m_3 = 18$ ,  $m_4 = 100$ ; моменты инерции звеньев, кг·м<sup>2</sup>:  $J_1 = 0.034$ ,  $J_2 = 0.036$ ,

$J_3 = 0.0441$ . Момент, приложенный к кривошипу, соответствует механической характеристике электродвигателя 4A80B4УЗ. При решении были приняты следующие начальные условия:

$t = 0$  с,  $\omega_1 = 43,5$  рад/с,  $\omega_3 = 0$  рад/с,  $\varphi = -64,1^\circ = 295,9^\circ$ ,  $\psi = -46,34^\circ = 313,66^\circ$ . На рисунках 5–7 представлены результаты численного динамического анализа кривошипно-коромыслового механизма с двумя степенями свободы при неустановившемся движении обобщенной координаты  $\varphi$ , двух ее производных  $\omega_1$  и  $\epsilon_1$ . Они определены по предлагаемой методике и с помощью имитационного моделирования в программном комплексе ADAMS/Solver. Рассматривался интервал времени

$T = 0,05$  с, количество шагов интегрирования принято равным  $N = 40$ , величины дискретных виртуальных перемещений  $\Delta\varphi = 0.1^\circ$ ,  $\Delta\psi = 0.1^\circ$ .

Представленная методика позволяет формулировать задачи динамического анализа механизмов с несколькими степенями свободы в терминах обобщенных координат, контролировать выполнение уравнений связи на каждом временном шаге «естественным» способом, как в классических уравнениях Лагранжа второго рода. Отличие системы (35) от уравнений Лагранжа заключается в том, что уравнения (35) составляются заново перед каждым новым шагом.

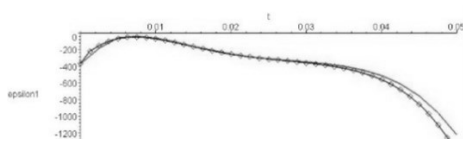


Рис. 5. Угловое ускорение кривошипа,  $\text{с}^{-2}$ :  
 ◆ – угловое ускорение  $\epsilon_1$ , определенное по предложенной методике; ■ – угловое ускорение  $\epsilon_1$ , посчитанное в программе ADAMS/Solver

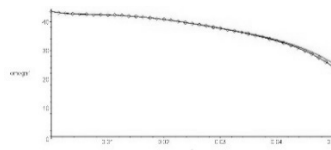


Рис. 6. Угловая скорость кривошипа,  $\text{с}^{-1}$ :  
 ◆ – угловая скорость  $\omega_1$ , определенная по предложенной методике; ■ – угловая скорость  $\omega_1$ , посчитанная в программе ADAMS/Solver

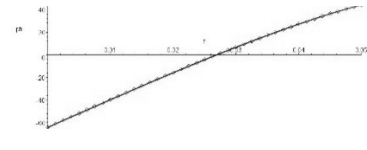


Рис. 7. Обобщенная координата  $\varphi^\circ$ :  
 ◆ – обобщенная координата  $\varphi$ , определенная по предложенной методике; ■ – обобщенная координата  $\varphi$ , посчитанная в программе ADAMS/Solver

Положение звеньев механизма определяется численно на каждом шаге из решения системы нелинейных алгебраических уравнений в соответствии с подпрограммами (8), что дает возможность

получать уравнения движения даже в тех случаях, когда их составление с использованием традиционного подхода Лагранжа является трудоемким.

#### Список литературы

1. Wilson, E. L. 1962. “Dynamic Response by Step-By-Step Matrix Analysis,” Proceedings, Symposium On The Use of Computers in Civil Engineering. Laboratorio Nacional de Engenharia Civil. Lisbon, Portugal. October 1-5.
2. Wilson, Edward L. “Tree-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures: A Physical Approach with Amphasis on Earthquake Engineering”. – Computers and Structures Inc., Berkeley, California, USA, 2002. – 423 с.
3. Абдраимов С. Построение механизмов переменной структуры и исследование их динамики. - Фрунзе: Илим, 1990. – 175 с.
4. Алимов О.Д., Абдраимов С. Теория механизмов переменной структуры и новые области их применения. – Изв.АН Кирг.ССР. Физ.-техн. и матем. науки, 1987. – № 2. – С. 29–33.
5. Антоноук Е.Я. Динамика механизмов переменной структуры / Киев: изд-во «Наукова думка», 1988. – 182 с.
6. Аппель Пауль. Теоретическая механика: Т. 2. Динамика системы, аналитическая механика. Перевод с франц. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы. – 1960. – 487 с.
7. Бате Клаус Юрген, Вилсон Эдвард. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
8. Золина Т.В. Оценка остаточного ресурса промышленного здания с мостовыми кранами в процессе его эксплуатации // Инженерно-строительный вестник Прикаспия -2019. – № 3 (29). – С. 6–16.
9. Клаф Рэй, Пензиен Джозеф. Динамика сооружений: Пер. с англ. – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.
10. Косенок Б.Б. Теория модульного векторного моделирования плоских и пространственных механизмов [Текст] / Б.Б. Косенок // Самара: АНО ВО Университет «МИР», 2017. - 120 с.
11. Лагранж Ж. Аналитическая механика. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. – 440 с.
12. Овчинников И.Г., Мавзовин В.С. Тенденции в оптимальном проектировании металлических конструкций с учетом условий эксплуатации // Инженерно-строительный вестник Прикаспия -2020. -№ 1 (31). – С. 43–50.
13. Павлов Б.И. Кинематический и динамический анализ пространственных рычажных механизмов с замкнутой кинематической структурой // Известия вузов. Машиностроение. 2013. №11. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/kinematicheskii-i-dinamicheskii-analiz-prostranstvennyh-rychazhnyh-mehanizmov-s-zamknutoy-kinematicheskoy-strukturey> (дата обращения: 23.02.2022).
14. Пожбелко В.И.. Возникновение переменной (изменяемой) структуры и области особых положений механизма с учётом зазоров и вырождения кинематических пар // Вестник ЮУрГУ. Серия: Машиностроение. 2010. № 29 (205). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/vozniknovenie-peremennoy-izmenyaemoy-strukturey-i-oblasti-osobykh-polozheniy-mehanizma-s-uchyotom-zazorov-i-vyrozhdeniya-kinematicheskikh> (дата обращения: 23.06.2022).
15. Просвирина И.С., Дербасова Е.М. Влияние скорости ветра на характер распределения давления снаружи многоэтажных зданий // Инженерно-строительный вестник Прикаспия -2020. – № 4 (34). – С. 57–60.

© О. А. Хохлова, Е. В. Пономарева, А. В. Синельщиков

#### Ссылка для цитирования:

Хохлова О. А., Пономарева Е. В., Синельщиков А. В. Модификация численного метода для решения задач кинематического и динамического анализа механизмов // Инженерно-строительный вестник Прикаспия : научно-технический журнал / Астраханский государственный архитектурно-строительный университет. Астрахань : ГАОУ АО ВО «АГАСУ», 2022. № 2 (40). С. 36–41.