

7. Евтюков С. А. К вопросу автоматизации процессов монолитного домостроения с учетом исследования конструкционных сталей в строительной робототехнике / С. А. Евтюков, Ю. И. Тилинин, А. П. Щербаков // Вестник гражданских инженеров. – 2019. – № 3 (74). – С. 72–79.
8. Тилинин Ю. И., Совершенствование технологического процесса подачи бетонной смеси в опалубку / Ю. И. Тилинин, Г. Д. Макаридзе, Е. В. Хорошенькая // Вестник гражданских инженеров. – 2019. – № 4 (75). – С. 74–80.
9. Тилинин Ю. И. Организация и технология производства работ при реконструкции жилых кирпичных зданий исторического центра Санкт-Петербурга / Ю. И. Тилинин // Современные направления развития технологии, организации и экономики строительства : сборник научных трудов участников межвузовской научно-практической конференции / под общ. ред. А. Н. Бирюкова. – Санкт-Петербург : ВИ (ИТ), 2015. – С. 264–270.
10. Biryukov A. N. Efficiency evaluation of apartment houses reconstruction with optimizational criteria application / A. N. Biryukov, I. N. Kravchenko, E. O. Dobryshkin, Yu. A. Biryukov, V. I. Kondrashchenko // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. – 2020. – Т. 16, № 1. – С. 14–24.
11. Латута В. В. Исследование водонепроницаемости фундамента для малоэтажного здания, изготовленного вибрационным методом / В. В. Латута, Д. А. Животов // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. – 2019. – № 4 (30). – С. 42–45
12. Гайдо А. Н. К вопросу определения технологических параметров производства свайных работ в стесненных условиях / А. Н. Гайдо, В. В. Верстов // Вестник гражданских инженеров. – 2017. – № 3 (62). – С. 84–94.
13. Мангушев Р. А. Перспективы устройства подземных паркингов в условиях стесненной застройки исторического центра Санкт-Петербурга / Р. А. Мангушев, А. И. Осокин, П. Г. Левинская // Жилищное строительство. – 2019. – № 4. – С. 3–18. – DOI: <https://doi.org/10.31659/0044-4472-2019-4-3-18>.
14. Мангушев Р. А. Проектирование и устройство подземных сооружений в открытых котлованах / Р. А. Мангушев, Н. С. Никифорова, В. В. Конюшков, А. И. Осокин. – Москва : АСВ, 2013. – 256 с.
15. Тилинин Ю. И. Домостроительные технологии в системе сохранения и развития архитектурно-планировочной структуры исторических российских городов : монография / Ю. И. Тилинин, О. А. Пастух (гл. 1), Д. А. Животов, А. Н. Панин. – Санкт-Петербург : СПбГАСУ, 2022. – 239 с.

© Ю. И. Тилинин, Д. А. Животов

Ссылка для цитирования:

Тилинин Ю. И., Животов Д. А. Технологии строительства зданий в городских условиях // Инженерно-строительный вестник Прикаспия : научно-технический журнал / Астраханский государственный архитектурно-строительный университет. Астрахань : ГАОУ АО ВО «АГАСУ», 2023. № 1 (43). С. 32–37.

УДК 539.32, 624.04

DOI 10.52684/2312-3702-2022-43-1-37-44

**АНАЛИЗ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЖАТО-ИЗОГНУТОГО СТЕРЖНЯ
С ИНДУЦИРОВАННОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ
ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ РАЗЛИЧНЫХ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ
В МЕТОДЕ БУБНОВА – ГАЛЕРКИНА**

С. Ю. Калашиников, Е. В. Гурова, Е. Г. Шведов

Калашиников Сергей Юрьевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Экспертиза и эксплуатация объектов недвижимости», Волгоградский государственный технический университет, г. Волгоград, Российская Федерация; Центральный научно-исследовательский и проектный институт Министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации, г. Москва, Российская Федерация, тел.: +7 (8442) 96-99-28; e-mail: kalashnikov@vstu.ru;

Гурова Елена Владимировна, кандидат технических наук, доцент кафедры «Экспертиза и эксплуатация объектов недвижимости», Волгоградский государственный технический университет, г. Волгоград, Российская Федерация;

Шведов Евгений Геннадьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Прикладная математика», Волгоградский государственный технический университет, г. Волгоград, Российская Федерация

Рассматривается продольный изгиб гибкого стального прямолинейного стержня. Неоднородность напряженного состояния в отклоненном состоянии приводит к стеснению изгибных деформаций, вызывающих изменение упругих характеристик материала по поперечному сечению и длине, означает изменение расчетных параметров конструкции. В уравнении изогнутой оси стержня в отклоненном состоянии используется предложенная ранее авторами инкрементальная теория нелинейного деформирования тел в неоднородных полях напряжений с индуцированной анизотропией свойств. Решение получено методом Бубнова – Галеркина на основе анализа прогибов стержня с использованием различных базисных функций. Проведен сравнительный анализ влияния на искомый результат вида базисных функций. Независимо от выбора аппроксимирующей



функции установлено заметное увеличение сжимающей силы, отвечающей значительному нарастанию прогибов по сравнению с бифуркационным подходом.

Ключевые слова: устойчивость стержней, градиент напряжений, критические силы, индуцированная анизотропия, базисные функции.

ANALYSIS OF DEFORMATION OF A COMPRESSED-BENT ROD WITH INDUCED ANISOTROPY WHEN USING VARIOUS BASIC FUNCTIONS IN THE BUBNOV – GALERKIN METHOD

S. Yu. Kalashnikov, Ye. V. Gurova, Ye. G. Shvedov

Kalashnikov Sergey Yurievich, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department "Expertise and Operation of Real Estate", Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation; Central Research and Design Institute of the Ministry of Construction, Housing and Communal Services of the Russian Federation, Moscow, Russian Federation, phone: +7 (8442) 96-99-28; e-mail: kalashnikov@vstu.ru;

Gurova Yelena Vladimirovna, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Expertise and Operation of Real Estate Objects, Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation;

Shvedov Yevgeniy Gennadyevich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Applied Mathematics Department, Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation

The longitudinal bending of a flexible steel straight rod is considered. The inhomogeneity of the stress state in the deflected state leads to the constraint of bending deformations, causing a change in the elastic characteristics of the material along the cross section and length, which means a change in the design parameters of the structure. In the equation of the bent axis of a rod in a deflected state, the incremental theory of non-linear deformation of bodies in non-uniform stress fields with induced anisotropy of properties, proposed earlier by the authors, is used. The solution was obtained by the Bubnov-Galerkin method based on the analysis of rod deflections using various basis functions. A comparative analysis of the influence of the type of basis functions on the desired result is carried out. Regardless of the choice of the approximating function, a noticeable increase in the compressive force was found, which corresponds to a significant increase in deflections compared to the bifurcation approach.

Keywords: rod stability, stress gradient, critical forces, induced anisotropy, basis functions.

Процесс деформирования и перехода материала в предельное состояние представляет собой сложное физико-механическое явление, описание которого в практических целях при расчете деформируемых элементов инженерных конструкций должно быть схематизировано достаточно простым образом. Большинство расчетных моделей, учитывающих реальные свойства материала, оперируют аппаратом нелинейной теории упругости, теорией упругости неоднородных или теорией упругости анизотропных тел. Более сложным является вариант одновременного учета нелинейности и анизотропии [1]. Инкрементальные теории деформирования различного типа приводят к особому виду нелинейности, когда тензоры деформаций и напряжений не прямо пропорциональны, а учитываются приращение искомым функций [2–4]. Нелинейная зависимость между напряжениями и деформациями в упругих телах с непрерывной макронеоднородностью предполагается возникающей вследствие различных технологических факторов изготовления и эксплуатации тела [5]. В этом случае модули упругости являются заданными непрерывными функциями координат. Однородные материалы вследствие внешних агрессивных воздействий также могут проявлять свойства наведенной неоднородности [6]. В самом общем случае от координат зависит количество модулей упругости, что является признаком проявления анизотропии, которая может носить естественный характер, зависящий от специфики

внутреннего строения или являться проявлением свойств, полученных в результате изготовления конструкционного материала. Теория упругости анизотропного тела, когда составляющие тензора деформаций являются линейными функциями компонент тензора напряжения, подробно рассмотрена в [7].

В ряде работ экспериментально установлено, что в процессе деформирования изотропные многокомпонентные металлы, сплавы, эластомеры и полимерные композиты могут проявлять свойства анизотропии [8–15]. Сложившиеся представления объясняют эти проявления эволюцией микроструктуры материала из-за переориентации кристаллографических осей при больших деформациях. Анизотропия подобного типа получила название наведенной или индуцированной.

В работе «Инкрементальная теория нелинейного деформирования тел в условиях неоднородного напряженного состояния» [16] предложена модель поведения упругопластического материала типа строительной стали, когда считается, что распределение напряжений вызывает анизотропию физических свойств материала, зависящую от степени неоднородности напряженного состояния в окрестностях рассматриваемой точки. Неоднородное напряженное состояние приводит к стеснению деформаций, когда менее напряженные объемы материала как бы «поддерживают» более напряженные объемы, усиливая их сопротивляемость деформированию [17]. Степень неоднородности напряженного состоя-

ния характеризуется вектор-градиентом интенсивности касательных напряжений.

В работах «Упругое деформирование брусьев при учете вида напряженного состояния в окрестности рассматриваемой точки» и «About the Distortion Model of Operational Compressed-Bent Bars with Induced Anisotropy» [18, 19] модель деформирования тел с инкрементальной анизотропией, индуцированной видом напряженного состояния, применена к задачам продольного изгиба стержней, а в «Применении метода Бубнова - Галеркина для анализа деформирования сжато-изогнутого стержня с индуцированной анизотропией» [20] была проведена ее реализация. Он представляет собой некоторый приближенный метод интегрирования дифференциальных уравнений краевой задачи, когда для дифференциального уравнения вида $\Phi(x, y, y', \dots) = 0$ с известными краевыми условиями задачи приближенное решение ищется в виде ряда

$$y = \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k(x), \quad (1)$$

где $\varphi_k(x)$ – некоторые базисные функции, которые удовлетворяют всем граничным условиям задачи, а C_k – неопределенные параметры, которые находятся из условия ортогональности невязки к базисным функциям:

$$\int_{x_1}^{x_2} \Phi(x, y, y', \dots) \varphi_k(x) dx = 0, \quad (2)$$

которое распадается на систему алгебраических уравнений. Количество уравнений равно числу неопределенных параметров C_k .

Рассмотрим стержень прямоугольного поперечного сечения длиной l .

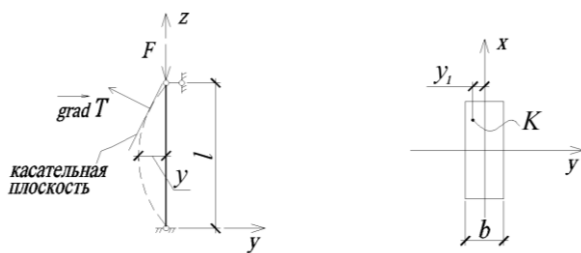


Рис. 1. Расчетная схема сжато-изогнутого стержня

Расчетная схема сжато-изогнутого стержня, которому зададим небольшое отклонение от прямолинейной формы равновесия (рис. 1). Предположим, что оно представляет собой следствие исчезающее малой не прямолинейности из-за технологических погрешностей изготовления, транспортировки или складирования. Даже при таком отклонении уже будет иметь место продольный изгиб. С учетом правила знаков приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня имеет следующий вид:

$$EI_x y''(z) = -M(z). \quad (3)$$

Для рассматриваемой задачи $M_x = F \cdot y$ – величина переменная по длине стержня. Кроме сжимающих, по поперечному сечению имеют место создающие неоднородность изгибные напряжения. В каждом сечении по длине стержня степень неоднородности различна в зависимости от величины прогиба. Любое увеличение продольной нагрузки F приведет к новому равносному состоянию: прогиб увеличится, новый изгибающий момент вызовет увеличенные изгибные напряжения. Следствием усиления неоднородности напряженного состояния станет рост $\text{grad}T$, еще большее стеснение деформаций, изменяющее упругие характеристики материала в этом сечении. В любом ином поперечном сечении по длине стержня при этой же продольной нагрузке упругие характеристики будут иметь другие численные значения, но их комбинация остается одинаковой для всех сечений. Таким образом, при продольном изгибе имеет место индуцированная видом напряженного состояния анизотропия, принципиально отличающаяся от продольного изгиба неоднородного или ортотропного стержня.

Модуль упругости в предлагаемой модели и по длине, и в каждом поперечном сечении $E = E_{gr} = E_{gr}(T, \text{grad}T)$ является функцией градиента интенсивности касательных напряжений «Инкрементальной теории нелинейного деформирования тел в условиях неоднородного напряженного состояния» для рассматриваемого случая:

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sigma_z^2}.$$

Нормальное напряжение вдоль оси Oz для произвольной точки K поперечного сечения:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{W_x} + \frac{F}{A} = \frac{F}{A} \cdot \left(1 \pm \frac{12y}{b^2} \cdot y_1\right).$$

Модуль градиента интенсивности касательных напряжений:

$$\text{grad}T = \left[\left(\frac{\partial T}{\partial y_1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{F}{A} \cdot \frac{12y}{b^2}.$$

Закон изменения градиентного модуля упругости в «Инкрементальной теории нелинейного деформирования тел в условиях неоднородного напряженного состояния: монография» предлагается описывать асимптотической дробно-линейной функцией:

$$E_{gr} = E_0 + 0,5 \cdot \frac{\text{grad}T/T}{\lambda_E + \text{grad}T/T},$$

где λ_E – некоторая упругая характеристика материала, определяемая экспериментально и имеющая размерность $[M^{-1}]$. Обозначив через g меру неоднородности напряженного состояния:

$$g = \frac{\text{grad}T}{T} = \frac{1}{b^2/12y + y_1},$$

имеем:

$$E_{gr} = E_0 + 0,5 \cdot \frac{g}{\lambda_E + g} = E_0 \cdot \left(\frac{\lambda_E + 1,5 \cdot g}{\lambda_E + g} \right). \quad (4)$$

На математической оси стержня, где $y_1 = 0$, из (4) получим:

$$E_{gr} = E_0 \cdot \left(\frac{\lambda_E \cdot b^2 + 18y}{\lambda_E \cdot b^2 + 12y} \right).$$

Заменяя в уравнении изогнутой оси стержня (3) модуль Юнга E_0 на градиентный модуль упругости, получим уравнение вида:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{F}{J \cdot E_0} \cdot y \cdot \frac{a + y}{a + 1,5y} = 0. \quad (5)$$

Здесь и далее обозначено $a = \lambda_E b^2 / 12$.

Методом Бубнова – Галеркина будем искать приближенное решение нелинейного дифференциального уравнения второго порядка (5), удовлетворяющее краевым условиям:

$$y(0) = 0, y(l) = 0. \quad (6)$$

В качестве базисных могут быть выбраны функции, составляющие часть некоторой полной системы и удовлетворяющие условию (6). Например, $u_1(z) = z \cdot (1 - z), u_2(z) = z^2 \cdot (1 - z)$.

Тогда кривая прогиба представляется частичной суммой правильного функционального ряда, в виде которого и будем искать решение:

$$y = C_1(z - z^2) + C_2(z^2 - z^3), \quad (7)$$

где C_1 и C_2 – постоянные коэффициенты, не равные нулю одновременно, а краевые условия

удовлетворяются при любом выборе коэффициентов C_k . Подставляя y и y'' по (7) в левую часть дифференциального уравнения (5), получим невязку:

$$\begin{aligned} R_1(z, C_1, C_2) = & C_1^2 \left[-3z + 3z^2 + \frac{F}{E_0 J} (z^2 - 2z^3 + z^4) \right] + \\ & + C_1 C_2 \left[3z - 15z^2 + 12z^3 + \frac{2F}{E_0 J} (z^3 - 2z^4 + z^5) \right] + \\ & + C_2^2 \left[3z^2 - 12z^3 + 9z^4 + \frac{F}{E_0 J} (z^4 - 2z^5 + z^6) \right] + \\ & + C_1 \left[-2a + \frac{Fa}{E_0 J} (z - z^2) \right] + C_2 \left[2a - 6az + \frac{Fa}{E_0 J} (z^2 - z^3) \right]. \end{aligned} \quad (8)$$

Условия ортогональности (2) функции R_1 функциям $u_1(z)$ и $u_2(z)$ приводят к системе:

$$\begin{cases} \int_0^l (z - z^2) R_1(z, C_1, C_2) dz = 0; \\ \int_0^l (z^2 - z^3) R_1(z, C_1, C_2) dz = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Подставляя в эту систему вместо $R_1(z, C_1, C_2)$ выражение (8), получим систему интегральных уравнений, которая при заданном значении силы F дает решение в виде четырех пар постоянных интегрирования C_1 и C_2 .

Кроме выше предложенной частичной суммы степенного ряда может быть использована сумма тригонометрических функций:

$$y = C_1 \sin \frac{\pi z}{l} + C_2 \sin \frac{\pi z^2}{l^2}. \quad (10)$$

Тогда невязка определяется выражением:

$$\begin{aligned} R_2(z, C_1, C_2) = & C_1^2 \sin^2 \frac{\pi z}{l} \left(\frac{F}{E_0 J} - 1,5 \frac{\pi^2}{l^2} \right) + \\ & + C_2^2 \left[\sin^2 \frac{\pi z^2}{l^2} \left(\frac{F}{E_0 J} - 6z^2 \frac{\pi^2}{l^4} \right) - 1,5 \frac{\pi}{l^2} \sin \frac{2\pi z^2}{l^2} \right] + \\ & + C_1 C_2 \left[\sin \frac{\pi z}{l} \sin \frac{\pi z^2}{l^2} \cdot \left(\frac{2F}{E_0 J} - 6 \frac{\pi^2 z^2}{l^4} - 1,5 \frac{\pi^2}{l^2} \right) + 3 \frac{\pi}{l^2} \sin \frac{\pi z}{l} \cos \frac{\pi z^2}{l^2} \right] + \\ & + C_1 \left[a \sin \frac{\pi z}{l} \left(\frac{F}{E_0 J} - \frac{\pi^2}{l^2} \right) \right] + C_2 \left[a \sin \frac{\pi z^2}{l^2} \left(\frac{F}{E_0 J} - 4 \frac{\pi^2 z^2}{l^4} \right) + a \frac{2\pi}{l^2} \cos \frac{\pi z^2}{l^2} \right], \end{aligned} \quad (11)$$

а условие ортогональности системой

$$\begin{cases} \int_0^l R_2(z, C_1, C_2) \sin \frac{\pi z}{l} dz = 0; \\ \int_0^l R_2(z, C_1, C_2) \sin \frac{\pi z^2}{l^2} dz = 0. \end{cases} \quad (12)$$

В случае использования в качестве базисной простой функции в виде эйлеровой синусоиды имеем:

$$y = C_1 \sin \frac{\pi z}{l}, \quad (13)$$

что дает невязку:

$$\begin{aligned} R_3(z, C_1) = & C_1^2 \sin^2 \frac{\pi z}{l} \left(\frac{F}{E_0 J} - 1,5 \frac{\pi^2}{l^2} \right) + \\ & + C_1 \sin \frac{\pi z}{l} \left(\frac{F}{E_0 J} \cdot a - a \frac{\pi^2}{l^2} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

и условие

$$\int_0^l \sin \frac{\pi z}{l} R_3(z, C_1) dz = 0. \quad (15)$$

В [21] для примера реализации вариационного метода в задачах устойчивости стержней выбрана простая функция в виде параболы:

$$y = C_1 z(l - z). \quad (16)$$

В нашем случае это дает невязку:

$$R_i(z, C_1) = C_1^2 \left[\frac{F}{E_0 J} (z^4 - 2lz^3) + \left(\frac{F}{E_0 J} l^2 + 3 \right) z^2 - 3zl \right] - C_1 \left[\frac{F}{E_0 J} (az^2 - azl) + 2a \right] \quad (17)$$

и условие для определения постоянной интегрирования

$$\int_0^l z(l-z)R_i(z, C_1)dz = 0. \quad (18)$$

В рассмотренном стальном стержне длиной $l = 1$ м, шириной поперечного сечения $h = 0,05$ м; будем задавать разную высоту поперечного сечения $b = 0,02$ м; $0,025$ м; $0,03$ м. Соответствующие эйлеровы критические силы составляют $F_{Э} = 68,4$ кН; $134,7$ кН; 232 кН. Значение упругой постоянной принято $\lambda_E = 20,1587 \text{ м}^{-1}$ в «Инкрементальной теории нелинейного деформирования тел в условиях неоднородного напряженного состояния» [16] по экспериментальным данным работы «О сопротивлении стали деформированию при неравномерном распределении напряжений» [22], модуль Юнга для строительной стали принят $E_0 = 210 \cdot 10^6 \text{ кПа}$, предел текучести $\sigma_0 = 260 \text{ МПа}$.

Нагружение стержня осуществлялось ступенями, начиная с $0,25F_{Э}$ до $1,5F_{Э}$. Реализация систем (10), (12), (15), (18), интегрирование и построение упругой линии (7), (10), (13) и (16) выполнены в авторском программном модуле, работающем под управлением системы Wolfram Mathematica. Определялись вещественные (не нулевые и не комплексные) значения постоянных C_k на каждом шаге нагружения и отвечающие им значения наибольших прогибов посередине высоты стержня. Для систем (9) и (12) математическому решению соответствует четыре пары C_1 и C_2 , из которых физический смысл имеют только третья и четвертая пара. Для уравнений (15) и (18) определяются два значения C , одно из которых нулевое. Оказалось, что в докритической области значений независимо от выбора функций решение получается в виде отрицательных значений, уменьшающихся по величине прогибов с ростом силы. В закритической области имеет место увеличение от нулевого значения максимальных прогибов с существенным их ростом после достижения сжимающей силой значения $F_{кр} \approx 1,25F_{Э}$. Сравнительные результаты вычислений приведены численно в таблицах 1–3 и графически на рисунках 2–4, где область превышений силы в интервале разрешенных прогибов затонирована.

Таблица 1

Значения наибольшего прогиба в сжато-изогнутом стержне
с $h = 0,02$ м; $F_{Э} = 68,4$ кН, $\lambda = 173,3$

F , кН	$\frac{F}{F_{Э}}$	Y_{\max} , мм			
		по (7)	по (16)	по (10)	по (13)
17,1	0,25	-0,5	-0,51	-0,46	-0,48
34,2	0,5	-0,43	-0,43	-0,39	-0,39
51,3	0,75	-0,3	-0,31	-0,25	-0,26
68,4	1,0	-0,025	-0,025	0	0
69,4	1,015	0,003	0,003	0,02	0,024
85,5	1,25	1,1	1,1	0,79	0,79
90,6	1,325	2,6	2,6	1,47	1,47
94	1,375	6,4	6,4	2,36	2,36
95,7	1,4	15,7	15,6	3,14	3,14
97,4	1,424			4,07	4,42

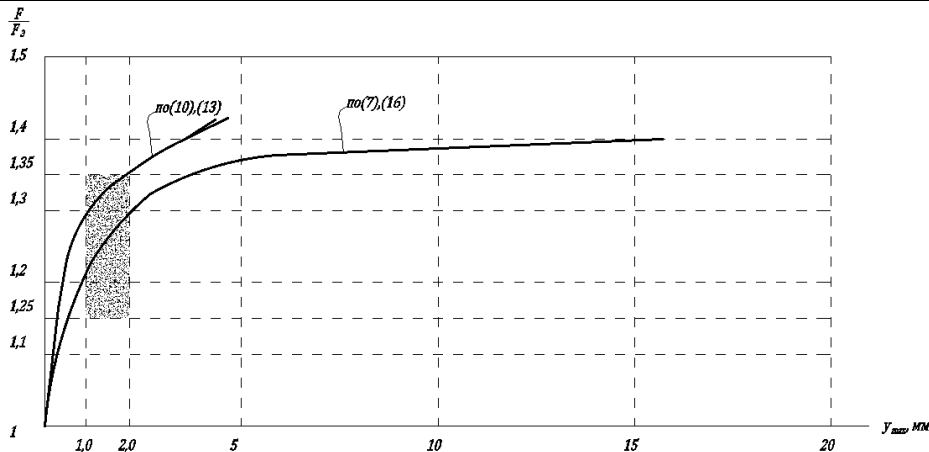


Рис. 2. График зависимости прогиба посередине высоты стержня с $h = 0,02$ м от продольной силы

Таблица 2

Значения наибольшего прогиба в сжато-изогнутом стержне
с $h=0,025$ м; $F_{\text{ср}}=134,7$ кН, $\lambda=138$

F , кН	$\frac{F}{F_{\text{ср}}}$	y_{max} , мм			
		по (7)	по (16)	по (10)	по (13)
33,6	0,25	-0,8	-0,51	-1,0	-0,47
67,7	0,5	-0,7	-0,44	-0,8	-0,39
101	0,75	-0,5	-0,31	-0,5	-0,26
134,7	1,0	-0,004	-0,03	0	-0,0002
136,7	1,015	0,004	0,003	0,0037	0,024
160,5	1,19	1,0	0,62	0,77	0,49
164,9	1,225	1,3	0,85	1,0	0,64
168,3	1,25	1,7	1,1	1,23	0,77
175	1,3	2,9	1,9	1,85	1,2
182	1,35	6,1	3,9	2,91	1,9
185,2	1,375	10,1	6,48	3,71	2,4
188,6	1,4	25,5	16,4	4,95	3,2

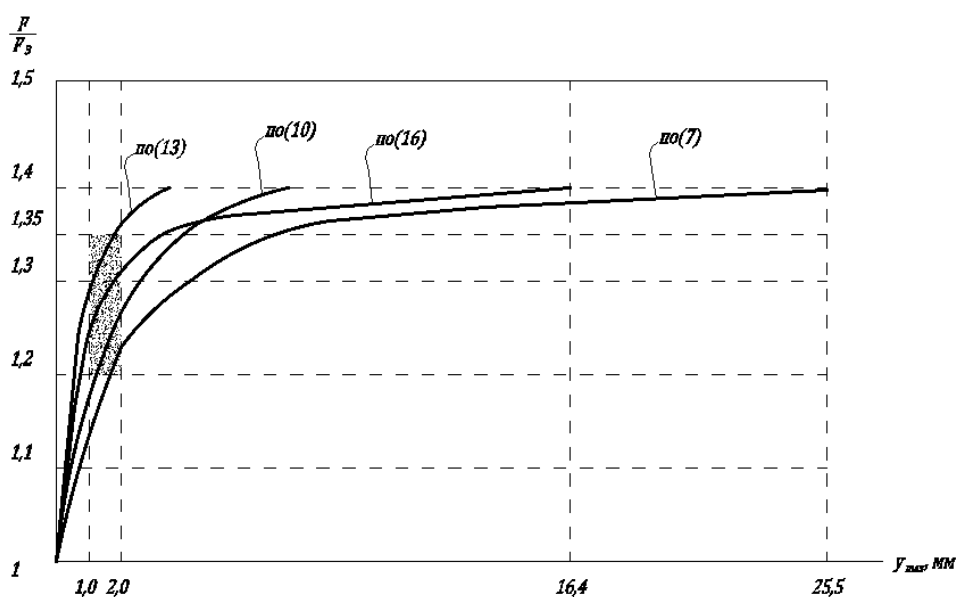

 Рис. 3. График зависимости прогиба посередине высоты стержня с $h=0,025$ м от продольной силы

Таблица 3

Значения наибольшего прогиба в сжато-изогнутом стержне
с $h=0,03$ м; $F_{\text{ср}}=232$ кН, $\lambda=115,5$

F , кН	$\frac{F}{F_{\text{ср}}}$	y_{max} , мм			
		по (7)	по (16)	по (10)	по (13)
58	0,25	-1,2	-0,5	-1	-0,47
116	0,5	-1	-0,44	-0,8	-0,39
174	0,75	-0,7	-0,31	-0,5	-0,26
232	1,0	-0,06	-0,03	0	0
234,6	1,011	0	0,02	0,04	0,017
272,4	1,17	1,15	0,51	0,95	0,42
284	1,22	1,9	0,85	1,45	0,64
298	1,28	3,55	1,58	2,34	1,04
301,6	1,3	4,23	1,88	2,66	1,18
307,4	1,325	5,8	2,6	3,29	1,46
313,4	1,35	8,7	3,85	4,17	1,85
318,4	1,37	13,5	6	5,17	2,29
325	1,4	37	16,5	7,14	3,7

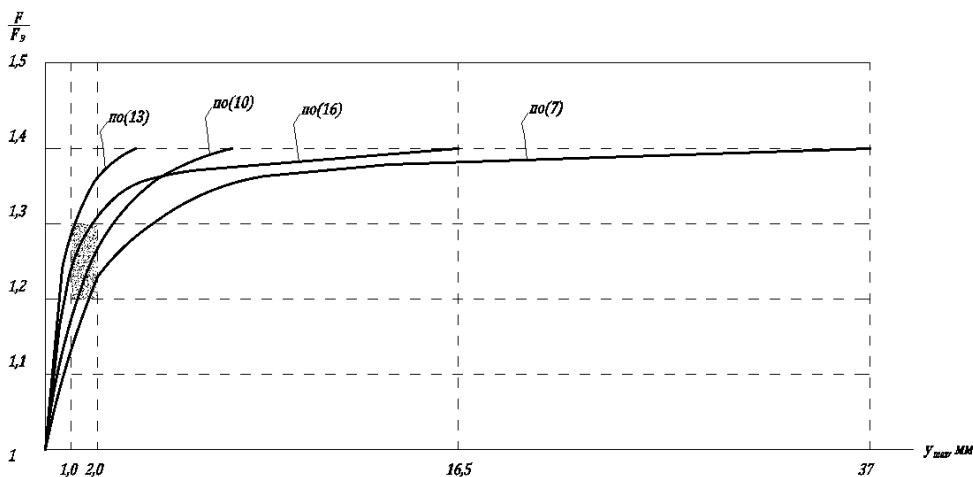


Рис. 4. График зависимости прогиба посередине высоты стержня с $h = 0,03$ м от продольной силы

Анализ табличных и графических данных демонстрирует численно сходные по смыслу решаемой задачи результаты. Для наиболее гибкого стержня с $h = 0,02$ м до нагрузки $1,25F_0 = 85,5$ кН независимо от вида базисных функций прогибы не превышают $1/1000$ длины пролета, а после нагрузки $1,375F_0 = 94$ кН прогибы превосходят $1/500$ пролета и монотонно нарастают. Следовательно, за критическую силу целесообразно принимать $F \approx 1,3F_0$.

Такая же картина наблюдается и для более жесткого стержня с $h = 0,025$ м. Здесь разрешаемые прогибы имеют место до $1,225F_0 = 164,9$ кН, а превышение прогибом $1/500$ длины имеет место после нагрузки $1,3F_0 = 175$ кН. Поэтому под значением критической силы будем полагать $F \approx 1,25F_0$. Для самого жесткого стержня при $h = 0,03$ м вышеприведенные соображения определяют границы $1,17F_0 = 272,4$ кН $< F_{кр} < 1,28F_0 = 298$ кН. Здесь необходимо отметить, что численные значения принимаемой за критическую сжимающей силы носят оценочный характер в силу того, что она определяется из условия превышения максимальным прогибом некоего назначаемого предела. В свою очередь, сами величины ординат кривой прогиба имеют вторичное значение, так как определяются видом аппроксимирующей функции, которая как показано выше может быть принята любой, удовлетворяющей граничным условиям. Во всех вышеприведенных случаях в интервале нормируемых перемещений соотношение «нагрузка – прогиб» отвечает физическому смыслу задачи и демонстрирует инкрементальный эффект.

Выводы

1. Приведенная модель деформирования материала свидетельствует о том, что на этапах возведения и эксплуатации в реальных продольно сжимаемых стержнях за счет

технологических дефектов изготовления и монтажа деформации изгиба могут иметь место с начального момента нагружения. Возникающая вследствие этого неоднородность напряженного состояния создает индуцированную его видом криволинейную трансверсальную анизотропию со сложно изменяющимися в пределах размеров стержня упругими характеристиками.

2. Показана возможность и единственность решения соответствующего уравнения, описывающего вид оси стержня в отклоненном состоянии. Однозначность и определенность достигается вариационным анализом прогибов стержня с использованием метода Бубнова-Галеркина и различных базисных функций.

3. Вид аппроксимирующей базисной функции в области разрешенных прогибов не оказывает существенного влияния на искомый результат.

4. Во всех случаях установлено существенное увеличение сжимающей силы, отвечающей значительному нарастанию прогибов по сравнению с бифуркационным подходом. В зависимости от изгибной жесткости превышение F/F_0 укладывается в интервал $1,2 \div 1,35$.

5. Анализ приведенных графических и табличных результатов показывает, что наиболее существенно градиентный эффект увеличения запаса устойчивости проявляется в более гибких стержнях.

6. Новые решения свидетельствуют об уточненной оценке устойчивого состояния стержня в сжато-изогнутом деформированном состоянии.

Работа выполнена по «Плану фундаментальных научных исследований Российской академии архитектуры и строительных наук и министерства строительства и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации на 2021 г.» по теме № 3.1.1.14 «Разработка методов определения устойчивости стержней с анизотропией, индуцированной видом напряженного состояния».

Список литературы

1. Черных К. Ф. Анизотропная нелинейная упругость / К. Ф. Черных // Изв. АН. Мех. тверд. тела. РАН. – 2004. – № 1. – С. 6–21.
2. Петров В. В. Инкрементальные уравнения механики деформируемого тела в полных функциях / В. В. Петров // Вестник отделения строительных наук. Вып. 14 : в 2 т. – 2010. – Т. 1. – С. 159–166.
3. Петров В. В. Нелинейная инкрементальная строительная механика / В. В. Петров. – Москва : Инфра-Инженерия, 2014. – 480 с.
4. Зиновьев А. С. Инкрементальная модель деформирования изгибаемого элемента на нелинейном основании с наведенной неоднородностью свойств : автореф. дисс. ... канд. техн. наук / А. С. Зиновьев. – Орел, 2009. – 118 с.
5. Петров В. В. Влияние неоднородности материала при расчете физически и геометрически нелинейных оболочек на прочность и устойчивость / В. В. Петров, И. В. Кривошеин // Academia. Архитектура и строительство. – 2014. – № 4. – С. 15.
6. Дядькин Н. С. Расчет элементов конструкций с наведенной неоднородностью при различных схемах воздействия хлоридсодержащих сред : дисс. ... канд. техн. наук / Н. С. Дядькин. – Саратов, 2002. – 267 с.
7. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела / С. Г. Лехницкий. – Москва – Ленинград : Гостехтеориздат, 1950. – 300 с.
8. Бусько В. Н. Применение магнитошумового метода для контроля механической анизотропии ферромагнитных материалов / В. Н. Бусько, А. А. Осипов // Приборы и методы измерений. – 2019. – Т. 10, № 3. – С. 281–292. – DOI: 10.21122/2220-9506-2019-10-3-281-292.
9. Попович А. А. Анизотропия механических свойств изделий, изготовленных методом селективного лазерного плавления порошковых материалов / А. А. Попович, В. Ш. Суфияров, Е. В. Борисов, И. А. Полозов, Д. В. Масыло, А. В. Григорьев // Известия вузов. Порошковая металлургия и функциональные покрытия. – 2016. – № 3. – С. 4–11. – DOI dx.doi.org/10.17073/1997-308X-2016-3-4-11.
10. Устинов К. Б. О наведенной анизотропии механических свойств эластомеров / К. Б. Устинов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2019. – № 5. – С. 27–36. – DOI: 10.1134/S0572329919050167.
11. Experimental analysis of the effect of carbon nanoparticles with different geometry on the appearance of anisotropy of mechanical properties in elastomeric composites / К. А. Mokhireva, A. Svistkov, V. N. Solod'ko, L. Komar, K. Stöckelhuber // Polymer testing. – 2017. – Т. 59. – С. 46–54. – DOI: 10.1016/j.polymertesting.2017.01.007.
12. Шадрин В. В. Анизотропия механических свойств наполненных вулканизаторов под воздействием внешней нагрузки / В. В. Шадрин, К. А. Мохирева, Л. А. Комар // Вестник Пермского федерального исследовательского центра. – 2017. – № 1. – С. 93–98.
13. Корнеев С. А. Математическое моделирование эффекта наведенной деформационной анизотропии резинокордного упругого элемента плоской муфты / С. А. Корнеев, В. С. Корнеев, Д. А. Романюк // Омский научный вестник. – 2017. – № 3 (153). – С. 10–15.
14. Комар Л. А. Исследование появления анизотропных свойств полимерных нанокомпозитов в результате предварительного деформирования в условиях двухосного нагружения / Л. А. Комар, К. А. Мохирева, И. А. Морозов // Вестник Пермского федерального исследовательского центра. – 2017. – № 2. – С. 61–66.
15. Тимченко С. Л. Управление физическими свойствами металлов и сплавов с помощью электрического и магнитного полей : дисс. ... д-ра техн. наук / С. Л. Тимченко. – Москва, 2021. – 290 с.
16. Гениев Г. А. Инкрементальная теория нелинейного деформирования тел в условиях неоднородного напряженного состояния : монография / Г. А. Гениев, С. Ю. Калашников. – Саратов : Сарат. гос. техн. ун-т, 2004. – 172 с.
17. Гениев Г. А. Об учете влияния неоднородности напряженного состояния на переход материала в пластическое состояние / Г. А. Гениев, С. Ю. Калашников // Строительная механика и расчет сооружений. – 1988. – № 6. – С. 12–15.
18. Калашников С. Ю. Упругое деформирование брусьев при учете вида напряженного состояния в окрестности рассматриваемой точки / С. Ю. Калашников, Е. В. Гурова // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. – 2021. – № 4 (38). – С. 5–10.
19. Калашников С. Ю. About the Distortion Model of Operational Compressed-Bent Bars with Induced Anisotropy / С. Ю. Калашников, Е. В. Гурова, Р. Х. Курамшин, Б. Языев // International Scientific Conference on Building Life-cycle Management. Information Systems and Technologies (Moscow 26 November 2021) / eds. : A. Ginzburg, G. Kashaeva. – Springer, Cham, 2022. – P. 95–102. – Режим доступа: https://doi.org/10.1007/978-3-030-96206-7_10. – (Book series: Lecture Notes in Civil Engineering (LNCE) ; vol. 231).
20. Калашников С. Ю. Применение метода Бубнова – Галеркина для анализа деформирования сжато-изогнутого стержня с индуцированной анизотропией / С. Ю. Калашников, Е. В. Гурова, Е. Г. Шведов // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. – 2022. – Вып. 1 (86). – С. 132–144.
21. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем / А. С. Вольмир. – Москва : Физматгиз, 1963. – 880 с.
22. Балдин В. А. О сопротивлении стали деформированию при неравномерном распределении напряжений / В. А. Балдин, В. Н. Потапов, А. А. Фадеев // Строительная механика и расчет сооружений. – 1982. – № 5. – С. 23–26.

© С. Ю. Калашников, Е. В. Гурова, Е. Г. Шведов

Ссылка для цитирования:

Калашников С. Ю., Гурова Е. В., Шведов Е. Г. Анализ деформирования сжато-изогнутого стержня с индуцированной анизотропией при использовании различных базисных функций в методе Бубнова – Галеркина // Инженерно-строительный вестник Прикаспия : научно-технический журнал / Астраханский государственный архитектурно-строительный университет. Астрахань : ГАОУ АО ВО «АГАСУ», 2023. № 1 (43). С. 37–44.