



## К ПОСТРОЕНИЮ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ КОНТРОЛЬНО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ

*Р. З. Хайруллин*

**Хайруллин Рустам Зиннатулович**, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Главного метрологического центра Минобороны России; профессор кафедры фундаментального образования, Московский государственный строительный университет, тел.: +7 (926) 405-22-17; e-mail: zrkzrk@list.ru

Представлен аналитический метод построения функции плотности распределения определяющего параметра контрольно – измерительных приборов, на основании которого принимается решение об их работоспособности и возможности продолжения эксплуатации или об отказе с последующей заменой на новый прибор. В основе метода лежат известное аналитическое решение уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова и новый алгоритм аналитического вычисления интеграла от производной по времени от функции условной плотности вероятности определяющего параметра. Интегрирование производится в пределах изменения определяющего параметра. Новизна состоит в представлении интеграла в виде линейной комбинации трех интегралов. Первый интеграл вычисляется с использованием замены переменной, второй – рассчитывается аналитически с использованием специальной функции Лапласа, а третий – с методом разложения в степенной ряд по определяющему параметру. Представленный метод может быть использован при проектировании и разработке новых образцов контрольно-измерительных приборов, моделировании процесса эксплуатации приборов, а также для прогнозирования дрейфа определяющего параметра в процессе эксплуатации.

**Ключевые слова:** функция плотности распределения, определяющий параметр, контрольно – измерительные приборы, строительный фонд.

## TO THE CONSTRUCTION OF THE PROBABILITY DENSITY FUNCTION OF THE FAILURE PROBABILITY OF INSTRUMENTATION DEVICES

*R. Z. Khayrullin*

**Khayrullin Rustam Zinnatulloevich**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Leader Scientific Worker of the Head Scientific Metrological Centre; Professor of the Department of Fundamental Education, Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, Russian Federation, phone: + 7 (926) 405-22-17; e-mail: zrkzrk@list.ru

The analytical method of constructing the distribution density function of the determining parameter of control and measuring devices, on the basis of which the decision about their serviceability and the possibility of continuing operation or about failure with subsequent replacement by a new device is presented. The method is based on the known analytical solution of the Fokker-Planck-Kolmogorov equation and on the new algorithm of analytical calculation of the integral of the time derivative of the conditional probability density function of the defining parameter. The integration is performed within the limits of the change in the defining parameter. The novelty consists in the representation of the integral as a linear combination of three integrals. The first integral is calculated using variable replacement, the second is calculated analytically using a special Laplace function, and the third is calculated using the method of expansion into a power series by a defining parameter. The presented method can be used in the design and development of new samples of control and measuring instruments, simulation of the process of operation of instruments, as well as for predicting the drift of the defining parameter in the process of operation.

**Keywords:** distribution density function, defining parameter, control and measuring instruments, building stock.

На современном этапе реализации Стратегии развития строительной отрасли и жилищно-коммунального хозяйства Российской Федерации на период до 2030 года возникает необходимость управления проектами по созданию высокотехнологичной строительной продукции [1–13], в том числе по созданию современных средств измерений и контрольно – измерительных приборов (КИП) [11–13], которые находят все более широкое применение в инновационном строительстве и при эксплуатации промышленного и гражданского строительного фонда.

В настоящей работе используется формализация моделей отказов КИП, основанная на отслеживании динамики определяющего параметра

(ОП), приводящего к отказовому состоянию [13–14]. Управление парком КИП осуществляется на основе прогнозирования дрейфа ОП, который, в общем случае, происходит за счет совместного воздействия детерминированных и случайных факторов. Поэтому задача моделирования дрейфа ОП КИП с учетом детерминированных и случайных факторов является актуальной.

Объектом исследования является парк однотипных КИП, используемых при эксплуатации промышленного и гражданского строительного фонда. Предметом исследования являются методы оценки безотказности и надежности работы парка КИП [14–16]. Целью исследования является изучение структуры функции

плотности распределения ОП КИП и разработка аналитического метода построения функции плотности его распределения, являющегося достаточно адекватным и применимым для решения практических задач.

В [12–15] описаны и проанализированы модели отказов измерительной техники, включая марковские диффузионные модели, позволяющие прогнозировать надежность и безопасность эксплуатации КИП и объектов, на которых они установлены. Изменение ОП описывается уравнением Фоккера-Планка-Колмогорова [15, 16]. Рассмотрен один из случаев [13], когда уравнение имеет аналитическое решение. Однако для построения функции плотности вероятности распределения отказов приходится применять численные методы дифференцирования и интегрирования аналитического решения указанного уравнения.

В настоящей работе представлен аналитический метод построения функции плотности распределения ОП КИП в виде линейной комбинации трех интегралов. Описан алгоритм преобразования подынтегрального выражения, позволяющий вычислить аналитически соответствующие интегралы.

В соответствии с [16] примем, что для марковского процесса диффузионного типа условная переходная плотность вероятности  $\omega(x, t)$ , ОП, описывается уравнением Фоккера – Планка – Колмогорова:

$$\frac{\partial \omega(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [K_1(x, t)\omega(x, t)] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [K_2(x, t)\omega(x, t)] = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) необходимо решать при заданных начальных и граничных условиях. Начальные условия могут быть заданы в виде некоторой функции распределения ОП в начальный момент времени, а граничные условия задаются в виде:  $\omega(-\infty, t) = 0$ ,  $\omega(\infty, t) = 0$  – для монотонного распределения и  $\omega(-\infty, t) = 0$ ,  $\omega(1, t) = 0$  – для немонотонного распределения.

Отметим, что решение уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова представляет собой, в общем случае, громоздкую математическую задачу. Уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова удается решить аналитически лишь в некоторых частных случаях. Применим метод, описанный в [15, 16], идея которого состоит в том, чтобы путем введения новых независимых переменных свести уравнение (2) к такому виду, для которого решение уже известно. Остановимся на двух случаях.

*Случай 1.* Примем, что коэффициент  $K_1$  зависит от ОП линейно:  $K_1(x, t) = a(t)x + c(t)$ , а коэффициент  $K_2$  не зависит от ОП:  $K_2(x, t) = K_2(t) = b(t)$ . Такое задание коэффициентов диффузии и сноса при некоторых

предположениях описывает деградационные процессы, вызванные химическими реакциями окисления паяных соединений КИП [10].

Для получения аналитического решения уравнения (2) введем новые переменные [13]:  $\tau = \phi(t)$ ,  $y = \psi(x, t)$ .

Тогда плотность вероятности принимает вид:

$$\begin{aligned} \omega(x, t) &= \omega_1(\psi(x, t), \phi(t)) \cdot |\psi'_x| = \\ &= \omega_1(y, \tau) \cdot |\psi'_x|, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\omega_1(y, \tau)$  – новая функция плотности распределения ОП. Подбирая функции  $\phi(t)$  и  $\psi(x, t)$ , можно определить новые коэффициенты  $K_1(y, \tau)$  и  $K_2(y, \tau)$  так, чтобы из уравнения (2) после перехода к новым переменным можно было найти функцию  $\omega_1(y, \tau)$ . Выберем в соответствии с [13]:

$$\phi(t) = \int_{t_0}^t b(\zeta) e^{-2 \int_{t_0}^{\zeta} a(\xi) d\xi} d\zeta,$$

$$\psi(x, t) = x e^{-\int_{t_0}^t a(\xi) d\xi} - \int_{t_0}^t c(\zeta) e^{-\int_{t_0}^{\zeta} a(\xi) d\xi} d\zeta,$$

$$\psi'_x(x, t) = e^{-\int_{t_0}^t a(\xi) d\xi}.$$

В настоящей работе исследуем случай:  $a(t) = a$ ,  $b(t) = b$ ,  $c(t) = c$ , где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – постоянные величины. Тогда

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{b(1 - e^{-2a(t-t_0)})}{2a}, \\ \psi(x, t) &= x e^{-a(t-t_0)} - c(1 - e^{-a(t-t_0)})/a, \\ \psi'_x(x, t) &= e^{-a(t-t_0)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда уравнение (2) принимает вид простейшего параболического уравнения [17]:

$$\frac{\partial \omega_1(y, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega_1(y, \tau)}{\partial y^2}, \quad (5)$$

решение которого при задании начального и граничного условия с помощью  $\delta$ - функции имеет вид [15–16]:

$$\omega_1(y, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\tau-\tau_0)}} e^{-\frac{(y-y_0)^2}{2(\tau-\tau_0)}}. \quad (6)$$

Используя формулы (3–5), получаем функцию условной плотности распределения вероятности в явном виде:

$$\begin{aligned} \omega(x, t) &= \frac{e^{-a(t-t_0) - \frac{(-\frac{c}{a})(1-e^{-a(t-t_0)}) + x e^{-a(t-t_0)} - x_0}{(\frac{b}{a})(1-e^{-a(t-t_0)})}}}{\sqrt{\left(\pi \cdot \frac{b}{a}\right) (1 - e^{-2a(t-t_0)})}} \times \\ &\times e^{-a(t-t_0)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Плотность распределения вероятностей  $f(t)$  и функция распределения  $F(t)$  в случае монотонного характера [15–16] изменения ОП находится по формулам:

$$f(t) = -\int_{-\infty}^1 \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial t} dx, \quad F(t) = \int_{-\infty}^t f(t) dt. \quad (8)$$

Знание функций  $f(t)$ ,  $F(t)$  позволяет найти целый ряд статистических оценок для ОП, включая математическое ожидание, среднее квадратическое отклонение и интенсивность отказов:  $\lambda(t) = f(t)/(1 - F(t))$ . Опишем метод построения функции  $f(t)$ . Вычислим производную функции  $\omega(x, t)$  (8) аналитически или с при-



менением символьных вычислений в среде Mathcad и представим  $\omega(x, t)$  (7) в виде:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = e^{-\frac{(x-m)^2}{2\tau}} [L_0(t) + L_1(t)x + L_2(t)x^2], \quad (9)$$

где  $L_0(t) = \frac{bm^2 e^{-5at}}{2\tau^2 \sqrt{2\pi\tau}} + \frac{am^2 e^{-3at}}{\tau \sqrt{2\pi\tau}} + \frac{m(c-ax_0)e^{-2at}}{\tau \sqrt{2\pi\tau}} -$

$$-\frac{ae^{-at}}{\sqrt{2\pi\tau}} - \frac{be^{-3at}}{2\tau \sqrt{2\pi\tau}},$$

$$L_1(t) = -\frac{2mbe^{-5at}}{2\tau^2 \sqrt{2\pi\tau}} - \frac{2mae^{-3at}}{\tau \sqrt{2\pi\tau}} - \frac{(c-ax_0)e^{-2at}}{\tau \sqrt{2\pi\tau}},$$

$$L_2(t) = \frac{be^{-5at}}{2\tau^2 \sqrt{2\pi\tau}} + \frac{ae^{-3at}}{\tau \sqrt{2\pi\tau}},$$

$$\tau = \frac{b}{2a}(1 - e^{-2at}), m = x_0 e^{at} + \frac{c}{a}(1 - e^{at}).$$

Тогда в соответствии с [15–16]:

$$-f(t) = \int_{x^*}^{x^{**}} \frac{\partial \omega}{\partial t} dx =$$

$$I_0(t) = \int_{x^*}^{x^{**}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\tau}} dx = \sqrt{2\pi\tau} \Phi\left(\frac{x^{**}-m}{\tau}\right) - \sqrt{2\pi\tau} \Phi\left(\frac{x^*-m}{\tau}\right),$$

$$I_1(t) = \int_{x^*}^{x^{**}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\tau}} x dx = \int_{x^*}^{x^{**}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\tau}} (x-m) dx + m \int_{x^*}^{x^{**}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\tau}} dx = -\tau \cdot \left( e^{-\frac{(x^{**}-m)^2}{2\tau}} - e^{-\frac{(x^*-m)^2}{2\tau}} \right) + m\sqrt{2\pi\tau} \left( \Phi\left(\frac{x^{**}-m}{\tau}\right) - \Phi\left(\frac{x^*-m}{\tau}\right) \right),$$

$$I_2(t) = \int_{x^*}^{x^{**}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\tau}} x^2 dx = \int_{x^*}^{x^{**}} \left( e^{-\frac{(x-m)^2}{2\tau}} (x^2 - 2mx + m^2) + e^{-\frac{(x-m)^2}{2\tau}} (2mx - m^2) \right) dx = \int_{x^*}^{x^{**}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\tau}} (x-m)^2 dx + 2m \int_{x^*}^{x^{**}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\tau}} x dx - m^2 \int_{x^*}^{x^{**}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\tau}} dx = 2\tau \cdot \left( R\left(\frac{x^{**}-m}{\tau}\right) - R\left(\frac{x^*-m}{\tau}\right) \right) + 2mI_1(t) - m^2 \sqrt{2\pi\tau} \left( \Phi\left(\frac{x^{**}-m}{\tau}\right) - \Phi\left(\frac{x^*-m}{\tau}\right) \right),$$

где  $\Phi(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  – специальная функция Лапласа,  $\tau = \varphi(t)$  – функция, зависящая от времени  $t$ , а  $R(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2\xi}} x^2 dx = \int_{-\infty}^x x^2 \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x^2/2\xi)^k}{k!} \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x)^{2k+3}}{2^k \xi^k (2k+3)k!}$  – специальная функция для вычисления интеграла с помощью степенного ряда.

Случай 2. Примем, что  $K_1(x, t) = a(t)(x - c)$ ,  $K_2(x, t) = b(t)(x - c)^2$ . Такое задание коэффициентов диффузии и сноса описывает процессы, в которых случайная составляющая превалирует над детерминированной составляющей ОП.

Для получения аналитического решения уравнения (2) выберем функции  $\phi(t)$  и  $\psi(x, t)$  в виде [14–16]:

$$\phi(t) = \int_0^t b(\tau) d\tau,$$

$$\psi(x, t) = \ln(x - c) + \int_0^t (b(\tau) - a(\tau)) d\tau. \quad (12)$$

Если  $a(t) = a$ ,  $b(t) = b$ , где  $a, b$  – постоянные величины, то  $\phi(t) = b \cdot t$ ,  $\psi(x, t) = \ln(x - c) +$

$$-f(t) = \int_{x^*}^{z^{**}} \frac{\partial \omega}{\partial t} dz = \int_{x^*}^{z^{**}} e^{-\frac{(z-m)^2}{2\tau}} [L_0(t) + L_1(t)z + L_2(t)z^2] dz = \int_{x^*}^{z^{**}} e^{-\frac{(z-m)^2}{2\tau}} dz = L_0(t)I_0(t) + L_1(t)I_1(t) + L_2(t)I_2(t).$$

Способ вычисления интегралов  $I_0, I_1, I_2$  описан выше.

$$= \int_{x^*}^{z^{**}} e^{-\frac{(z-m)^2}{2\tau}} [L_0(t) + L_1(t)z + L_2(t)z^2] dz. \quad (10)$$

Представим последний интеграл в виде суммы трех вспомогательных интегралов:

$$-f(t) = L_0(t) \int_{x^*}^{x^{**}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\tau}} dx + L_1(t) \int_{x^*}^{x^{**}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\tau}} x dx + L_2(t) \int_{x^*}^{x^{**}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\tau}} x^2 dx = L_0(t)I_0(t) + L_1(t)I_1(t) + L_2(t)I_2(t), \quad (11)$$

где  $x^{**}$  – значение ОП, при котором происходит отказ КИП,  $x^*$  – начальное значение ОП.

Вычислим вспомогательные интегралы  $I_0(t), I_1(t), I_2(t)$ :

$$+ (b - a) \cdot t, \psi'_x(x, t) = 1/(x - c), y_0 = \ln(x_0 - c), \tau_0 = 0.$$

Проводя соответствующие выкладки, можно показать, что после перехода к новым переменным (12) вновь получаются соотношения, аналогичные (5)–(6). Соотношение, аналогичное выражению (7), может быть получено после подстановки замены переменных (12) в (6):

$$\omega(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b t \cdot (x-c)}} e^{-\frac{(\ln(x-c) + (b-a)t - \ln(x_0-c))^2}{2bt}}, \quad (13)$$

Вычислим производную функции  $\omega(x, t)$  (13) аналитически или с применением символьных вычислений в среде Mathcad и представим в виде, аналогичном выражению (7):

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = e^{-\frac{(z-m)^2}{2b\tau}} [L_0(t) + L_1(t)z + L_2(t)z^2].$$

Введем обозначения:

$$z = \ln(x - c), m = \ln(x_0 - c) - (b - a)t,$$

$$L_0(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi b \cdot 2t\sqrt{t}}} + \frac{m^2 - 2tm(a-b)}{2bt^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi b t}},$$

$$L_1(t) = \frac{2t(a-b) - 2m}{2bt^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi b t}}, L_2(t) = \frac{1}{2bt^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi b t}}.$$

Тогда

Таким образом, в рассмотренных двух случаях плотность распределения вероятности ОП вычисляется аналитически с использованием

специальной функции Лапласа  $\Phi(x)$  и специальной функции  $R(x)$  для приближенного вычисления интеграла с помощью степенного ряда.

Отметим, что решение уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова (2) в полном объеме возможно также, если применить хорошо известный в математической физике метод разделения переменных (метод Фурье) [17]. Этот метод весьма трудоемок, а получаемое с его помощью решение обычно выражается через сложные функциональные ряды.

Двумерная поверхность функции условной плотности вероятности  $\omega(x, t)$  для случая 2 при  $a = 0,5, b = 0,6, c = -0,1, x_{10} = 0,1$  изображена на рисунке 1.

На рисунке 2а–г для случая 2 представлены линии уровня графиков поверхностей  $\omega(x, t)$  при разных значениях параметра  $c$ .

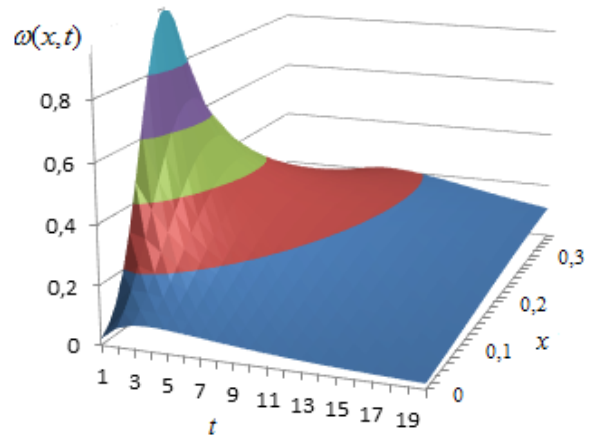


Рис. 1. Поверхность функции условной плотности распределения вероятности  $\omega(x, t)$  для случая 2

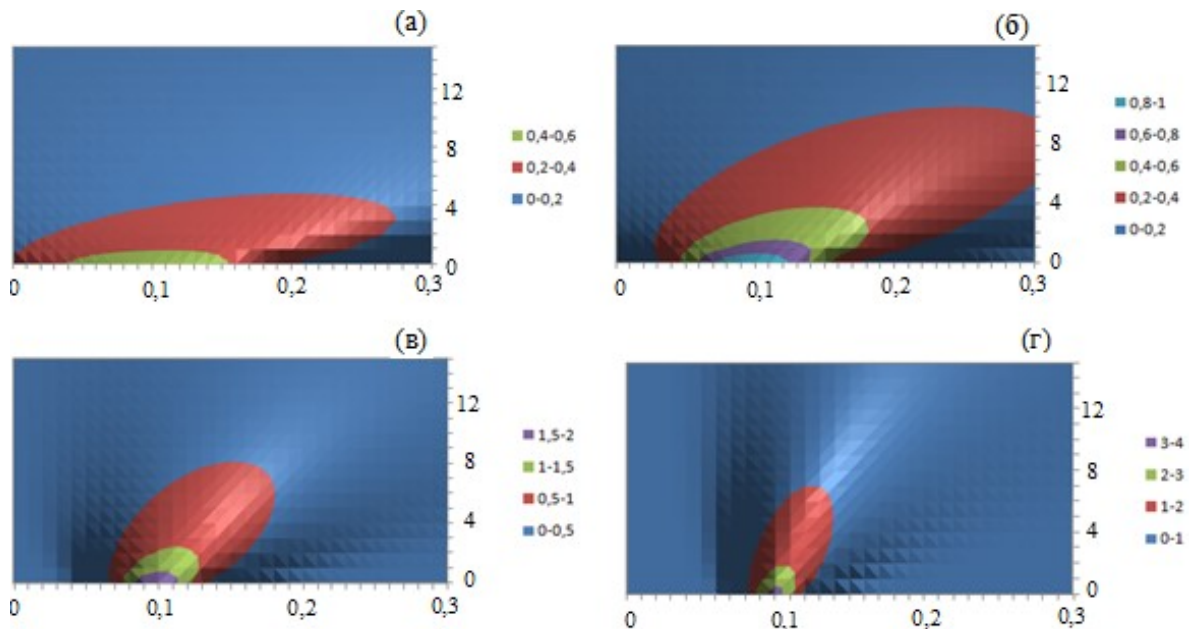


Рис. 2. Линии уровня графиков поверхностей  $\omega(x, t)$  при разных значениях параметра  $c$ : (а)  $c = -0,5$ ; (б)  $c = -0,2$ ; (в)  $c = 0$ ; (г)  $c = 0,9$

Видно, что с увеличением параметра  $c$  направление градиента функции  $\omega(x, t)$  разворачивается против часовой стрелки.

Структура функции плотности распределения  $f(t) = f_0(t) + f_1(t) + f_2(t)$  проиллюстрирована на рисунке 3.

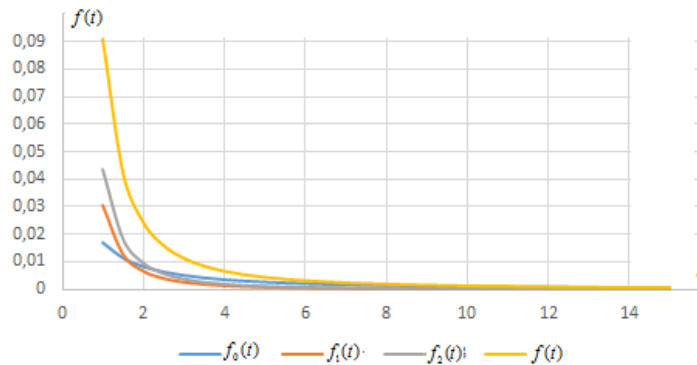


Рис. 3. Структура функции плотности распределения времени безотказной работы

Через  $f_0(t), f_1(t), f_2(t)$  обозначены составляющие функции  $f(t)$ , соответствующие нулевой, первой и второй степени ОП, и построенные по результатам вычисления трех вспомогательных интегралов. Все три составляющие при  $t \rightarrow 0$  уходят в бесконечность, причем наибольший вклад в функцию плотности распределения  $f(t)$  вносит вспомогательный интеграл, соответствующий второй степени ОП. С увеличением времени эксплуатации  $t$  начинает превалировать первая составляющая  $f_0(t)$ , и функция распределения  $f(t)$  приближается к нормальному закону распределения. Видимо с этим связано, что интенсивность отказов при  $t > 15$  (на периоде старения КИП) начинает резко возрастать.

#### Обсуждения результатов и выводы

Разработан аналитический метод построения функции плотности распределения ОП КИП, использующий аналитическое решение уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова. Метод основан на представлении производной от функции переходной плотности вероятности распределения ОП в виде линейной комбинации трех интегралов. Один из интегралов вычисляется аналитически, с использованием таблицы интегралов. Второй интеграл вычисляется с помощью специальной функции Лапласа. Третий интеграл вычисляется путем разложения функции в степенной ряд.

Поскольку степенной ряд сходится при всех значениях ОП, то его использование не накладывает дополнительных ограничений на область применимости представленного в статье метода. При решении практических задач

достаточно ограничиться первыми 6–10 членами разложения в ряд.

Отметим, что построенная в настоящей работе аналитическим методом функция  $f(t)$  совпадает с функцией плотности распределения численно.

Разработанный метод позволяет строить и анализировать широкий спектр метрологических характеристик, получать их статистические оценки. Интенсивность отказов КИП для рассмотренных в статье двух случаев имеет U-образный вид, который хорошо согласуется с классической зависимостью интенсивности отказов от времени [15].

Представленный в статье метод использовался в задачах прогнозирования и моделирования надежности паяных соединений интегральных схем КИП, применяемых для оснащения специальных объектов, эксплуатируемых, в том числе, в жестких условиях и агрессивных средах.

Представленный метод применялся для прогнозирования таких метрологических характеристик, как уход нулевой отметки КИП и увеличение погрешности измерений с течением времени.

Разработанный метод может быть использован для определения наиболее слабых звеньев, комплектующих и компонентов, из-за которых КИП приходит в неработоспособное состояние, а также для разработки рекомендаций по использованию определенных производственных материалов с необходимыми физико-химическими свойствами для изготовления указанных узлов, звеньев и компонентов.

#### Список литературы

1. Глазкова В. В. Теоретические аспекты инновационного развития единых теплоснабжающих организаций в условиях перехода на новый энергетический уклад / В. В. Глазкова // Вестник МГСУ. – 2022. – Т. 17, вып. 8. – С. 1073–1084.
4. Король Е. А. Использование инновационных технологий устройства стеновых покрытий с модульными системами озеленения / Е. А. Король, Н. С. Шушунова // Вестник МГСУ. – 2021. – Т. 16, вып. 7. – С. 912–925.
3. Rishi Kumara. Live Life Cycle Assessment Implementation using Cyber Physical Production System Framework for 3D Printed Products / Rishi Kumara, P. G. Padma Vilochania, S. Kahnthinishaa, Omkar Patila, Felipe Cerdas, Kuldeep Singh Sangwana, Christoph Herrmann // Procedia CIRP: Life Cycle Engineering Conference. – 2022. – Vol. 105. – Pp. 284–289.
4. Vallerio D. A. Sustainable Design: The Science of Sustainability and Green Engineering / D. A. Vallerio, C. Brasier. – John Wiley&Sons Inc., 2008. – 333 p.
5. Гладких В. А. Стойкость сероасфальтобетонов к образованию колеи / В. А. Гладких, Е. В. Королев, Д. Л. Хусид // Вестник МГСУ. – 2016. – Вып. 12. – С. 70–78.
6. Andrea Mio. Multiscale modelling techniques in Life Cycle Assessment: application to product design / Andrea Mio, Maurizio Fermeglia // Procedia CIRP–Life Cycle Engineering Conference. – 2022. – Vol. 105. – Pp. 688–693.
7. Бакрунов Ю. О. Внедрение инновационных технологий в управление строительной и специальной техникой / Ю. О. Бакрунов, Е. Ю. Васильева // Вестник МГСУ. – 2022. – Т. 17, вып. 6. – С. 813–822.
8. Исанова А. В. Анализ использования современной теплоизоляции на основе аэрогеля при проектировании энергоэффективных зданий / А. В. Исанова, Е. Д. Кретова, Д. А. Драпалюк, Н. А. Драпалюк // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. – 2022. – № 4 (42). – С. 15–22.
9. Коровкин М. О. Влияние минеральных добавок на эффективность суперпластификаторов в самоуплотняющихся мелкозернистых бетонных смесях / М. О. Коровкин, Н. А. Ерошкина, А. А. Короткова // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. – 2022. – № 3 (41). – С. 56–61.
10. Семенова Э. Е. Использование тепловых насосов для повышения энергоэффективности гражданских зданий / Э. Е. Семенова, Т. В. Богатова, А. В. Исанова, М. В. Рубцова // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. – 2022. – № 1 (39). – С. 29–32.
11. Хайруллин Р. З. К оптимальному управлению показателями эффективности парка измерительной техники / Р. З. Хайруллин // Вестник МГСУ. – 2017. – № 5. – С. 564–571.

12. Хайруллин Р. З. Оптимизация процессов эксплуатации и обновления парка измерительной техники / Р. З. Хайруллин // Измерительная техника. – 2022. – № 8. – С. 28–34.
13. Хайруллин Р. З. Диффузионная модель дрейфа метрологических характеристик измерительной техники / Р. З. Хайруллин // Научно-технический вестник Поволжья. – 2022. – № 12. – С. 79–82.
14. Азарсков В. Н. Надежность систем управления и автоматики / В. Н. Азарсков, В. П. Стрельников. – Киев : НАУ, 2004. – 64 с.
16. Казаков В. А. Введение в теорию марковских процессов и некоторые задачи радиотехники / В. А. Казаков. – Москва : Советское радио, 1973. – 232 с.
17. Колмогоров А. Н. Аналитические методы теории вероятностей / А. Н. Колмогоров // Успехи математических наук. – 1938. – Вып. V. – С. 5–41.
18. Араманович И. Г. Уравнения математической физики / И. Г. Араманович, В. И. Левин. – Москва : Наука, 1969. – 288 с.

© Р. З. Хайруллин

**Ссылка для цитирования:**

Хайруллин Р. З. К построению функции плотности распределения вероятности безотказной работы контрольно-измерительных приборов // Инженерно-строительный вестник Прикаспия : научно-технический журнал / Астраханский государственный архитектурно-строительный университет. Астрахань : ГАОУ АО ВО «АГАСУ», 2023. № 2 (44). С. 128–133.

УДК 539.3+004.021+004.94

DOI 10.52684/2312-3702-2023-44-2-133-140

**АЛГОРИТМ БЫСТРОГО ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ  
В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

**В. Ю. Шаранин, А. А. Семенов**

**Шаранин Виталий Юрьевич**, аспирант, Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, тел.: +7 (812) 575-05-49; email: vitas930831@mail.ru;

**Семенов Алексей Александрович**, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой информационных технологий, Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, тел.: +7 (812) 575-05-49; email: sw.semenov@gmail.com

В работе предложен алгоритм реализации численного интегрирования в задачах расчета тонкостенных оболочечных конструкций. В основе исследования используется геометрически нелинейная математическая модель типа Тимошенко – Рейснера, учитывающая ортотропию материала, поперечные сдвиги и возможность расчета конструкций разных форм (пологих оболочек двоякой кривизны, цилиндрических и конических панелей и др.). Модель записана в форме функционала полной потенциальной энергии деформации оболочки. К модели применяется метод Ритца для сведения вариационной задачи о минимуме функционала к решению системы нелинейных алгебраических уравнений. В процессе формирования системы возникает необходимость вычисления большого количества интегралов. Предлагается, выделив среди них повторяющиеся, записывать значения в базу данных, что позволяет достигнуть высокой производительности по сравнению с обычным вариантом расчета. Программная реализация выполнена на языке Python. Приведены примеры исследования полой оболочки двоякой кривизны на устойчивость.

**Ключевые слова:** оболочки, устойчивость, алгоритм, интегрирование, Python, хэш, быстрдействие, нелинейная задача.

**ALGORITHM FOR FAST NUMERICAL INTEGRATION  
IN PROBLEMS OF BUCKLING OF SHELL STRUCTURES**

**V. Yu. Sharanin, A. A. Semenov**

**Sharanin Vitaliy Yuryevich**, postgraduate student, St. Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, St. Petersburg, Russian Federation, phone: +7 (812) 575-05-49; email: vitas930831@mail.ru;

**Semenov Aleksey Aleksandrovich**, PhD in Tech. Sci., Associate Professor, Head of Department of Computer Science, St. Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, St. Petersburg, Russian Federation, tel.: +7 (812) 575-05-49; email: sw.semenov@gmail.com

The paper proposes an algorithm for the implementation of numerical integration in the problems of calculating thin-walled shell structures. The study is based on a geometrically nonlinear mathematical model of the Timoshenko-Reissner type, which takes into account the orthotropy of the material, transverse shifts and the possibility of calculating structures of various shapes (double-curved shallow shells, cylindrical and conical panels, etc.). The model is written