12. Хайруллин Р. З. Оптимизация процессов эксплуатации и обновления парка измерительной техники / Р. З. Хайруллин // Измерительная техника. – 2022. – № 8. – С. 28–34.
13. Хайруллин Р. З. Диффузионная модель дрейфа метрологических характеристик измерительной техники / Р. З. Хайруллин // Научно-технический вестник Поволжья. – 2022. – № 12. – С. 79–82.
14. Азарсков В. Н. Надежность систем управления и автоматики / В. Н. Азарсков, В. П. Стрельников. – Киев : НАУ, 2004. – 64 с.
16. Казаков В. А. Введение в теорию марковских процессов и некоторые задачи радиотехники / В. А. Казаков. – Москва : Советское радио, 1973. – 232 с.
17. Колмогоров А. Н. Аналитические методы теории вероятностей / А. Н. Колмогоров // Успехи математических наук. – 1938. – Вып. V. – С. 5–41.
18. Араманович И. Г. Уравнения математической физики / И. Г. Араманович, В. И. Левин. – Москва : Наука, 1969. – 288 с.

Ссылка для цитирования:
Хайруллин Р. З. К построению функции плотности распределения вероятности безотказной работы контрольно-измерительных приборов // Инженерно-строительный вестник Прикаспия : научно-технический журнал / Астраханский государственный архитектурно-строительный университет. Астрахань : ГАОУ АО ВО «АГАСУ», 2023. № 2 (44). С. 128–133.

УДК 539.3+004.021+004.94
DOI 10.52684/2312-3702-2023-44-2-133-140

АЛГОРИТМ БЫСТРОГО ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ В ЗАДАЧАХ УСТОЙЧИВОСТИ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В. Ю. Шаранин, А. А. Семенов

Шаранин Виталий Юрьевич, аспирант, Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, тел.: +7 (812) 575-05-49; email: vitas930831@mail.ru;

Семенов Алексей Александрович, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой информационных технологий, Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, г. Санкт-Петербург, Российская Федерация, тел.: +7 (812) 575-05-49; email: sw.semenov@gmail.com

В работе предложен алгоритм реализации численного интегрирования в задачах расчета тонкостенных оболочечных конструкций. В основе исследования используется геометрически нелинейная математическая модель типа Тимошенко – Рейснера, учитывающая ортотропию материала, поперечные сдвиги и возможность расчета конструкций разных форм (пологих оболочек двоякой кривизны, цилиндрических и конических панелей и др.). Модель записана в форме функционала полной потенциальной энергии деформации оболочки. К модели применяется метод Ритца для сведения вариационной задачи о минимуме функционала к решению системы нелинейных алгебраических уравнений. В процессе формирования системы возникает необходимость вычисления большого количества интегралов. Предлагается, выделив среди них повторяющиеся, записывать значения в базу данных, что позволяет достигнуть высокой производительности по сравнению с обычным вариантом расчета. Программная реализация выполнена на языке Python. Приведены примеры исследования пологой оболочки двоякой кривизны на устойчивость.

Ключевые слова: *оболочки, устойчивость, алгоритм, интегрирование, Python, хэш, быстродействие, нелинейная задача.*

ALGORITHM FOR FAST NUMERICAL INTEGRATION IN PROBLEMS OF BUCKLING OF SHELL STRUCTURES

V. Yu. Sharanin, A. A. Semenov

Sharanin Vitaliy Yuryevich, postgraduate student, St. Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, St. Petersburg, Russian Federation, phone: +7 (812) 575-05-49; email: vitas930831@mail.ru;

Semenov Aleksey Aleksandrovich, PhD in Tech. Sci., Associate Professor, Head of Department of Computer Science, St. Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, St. Petersburg, Russian Federation, tel.: +7 (812) 575-05-49; email: sw.semenov@gmail.com

The paper proposes an algorithm for the implementation of numerical integration in the problems of calculating thin-walled shell structures. The study is based on a geometrically nonlinear mathematical model of the Timoshenko-Reissner type, which takes into account the orthotropy of the material, transverse shifts and the possibility of calculating structures of various shapes (double-curved shallow shells, cylindrical and conical panels, etc.). The model is written in the form of a functional of the total potential energy of the shell deformation. The Ritz method is applied to the model to reduce the variational problem of the minimum of the functional to the solution of a system of nonlinear algebraic equations. In the process of system formation, it becomes necessary to calculate a large number of integrals. It is proposed, having singled out the repeating ones among them, to write the values to the database, which makes it possible to achieve high performance compared to the usual calculation option. The software implementation is made in Python. Examples of buckling studies of a shallow shell of double curvature are given.

Keywords: *shells, buckling, algorithm, integration, Python, hash, speed, nonlinear problem.*

Введение

Оболочечные конструкции широко используются практически во всех отраслях промышленности: в судо- и самолетостроении, в гидротехнике, в объектах АЭС, в мостостроении, при возведении самых разнообразных промышленных, сельскохозяйственных и гражданских объектов [1–3], в дорожном и подземном строительстве, в горнодобывающей и перерабатывающей промышленности.

Одной из наиболее важных задач, связанных с обеспечением безопасной работы оболочечных конструкций, является анализ их устойчивости [4–7]. Поэтому нахождение значений критических нагрузок, при которых оболочка резко проваливается, и очагов концентрации напряжений является актуальной задачей.

Потеря устойчивости оболочки связана с возникновением больших деформаций, которые возможно исследовать, учитывая геометрическую нелинейность [8–11]. В результате это приводит к необходимости выполнения ресурсоемких вычислений [12–14], как в отношении решения нелинейных систем уравнений, так и в отношении численного интегрирования.

Целью данной работы является разработка наиболее эффективного по времени расчета алгоритма численного интегрирования применительно к задаче анализа устойчивости оболочечной конструкции.

1. Теория и методы

1.1. Математическая модель

Математическая модель деформирования оболочечной конструкции состоит из трех групп соотношений: геометрических, связывающих деформации и перемещения; физических, связывающих напряжения и деформации; функционала полной потенциальной энергии деформации оболочки.

Деформации в координатной поверхности оболочки выражаются через перемещения U, V, W вдоль осей x, y, z (с учетом геометрической нелинейности) следующим образом:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{A}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB}V\frac{\partial A}{\partial y} - k_x W + \frac{1}{2}{\theta_1}^2,$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{B}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB}U\frac{\partial B}{\partial x} - k_y W + \frac{1}{2}{\theta_2}^2,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{A}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B}V\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB}U\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial x}V + \theta_1\theta_2, \quad (1)$$

$$\theta_1 = -\left(\frac{1}{A}\frac{\partial W}{\partial x} + k_x U\right), \qquad \theta_2 = -\left(\frac{1}{B}\frac{\partial W}{\partial y} + k_y V\right),$$

$$k_x = \frac{1}{R_1}, \quad k_y = \frac{1}{R_2},$$

где $U = U(x,y),\ V = V(x,y),\ W = W(x,y)$ – неизвестные функции перемещений; $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ – деформации удлинения вдоль координат x, y срединной поверхности; $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ – деформации сдвига в плоскостях xOy, xOz, yOz соответственно. Деформации для слоя, отстоящего от срединного на расстояние z, тогда будут выражаться соотношениями:

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x + z\chi_1 \quad \varepsilon_y^z = \varepsilon_y + z\chi_2 \quad \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + 2z\chi_{12}, \quad (2)$$

где функции изменения кривизны χ_1, χ_2 и кручения χ_{12} принимают вид:

$$\chi_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial y}\Psi_y, \quad \chi_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial x}\Psi_x, \quad (3)$$

$$\chi_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial \Psi_y}{\partial x} + \frac{1}{B}\frac{\partial \Psi_y}{\partial x} - \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial A}{\partial y}\Psi_y + \frac{\partial B}{\partial x}\Psi_y\right)\right),$$

где $\Psi_x = \Psi_x(x,y),\ \Psi_y = \Psi_y(x,y)$ – неизвестные функции углов поворота нормали (таким образом, в математической модели присутствует 5 неизвестных функций).

Усилия N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}, моменты M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx} и поперечные силы Q_x, Q_y, приходящиеся на единицу длины сечения и приведённые к координатной поверхности:

$$N_x = \frac{E_1 h}{1-\mu_{12}\mu_{21}}\left(\varepsilon_x + \mu_{21}\varepsilon_y\right), N_y = \frac{E_2 h}{1-\mu_{12}\mu_{21}}\left(\varepsilon_y + \mu_{12}\varepsilon_x\right),$$

$$N_{xy} = N_{yx} = G_{12}h\gamma_{xy}, \ M_x = \frac{E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}}\frac{h^3}{12}\left(\chi_1 + \mu_{21}\chi_2\right),$$

$$M_y = \frac{E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}}\frac{h^3}{12}\left(\chi_2 + \mu_{12}\chi_1\right), \quad (4)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = G_{12}\frac{h^3}{6}\chi_{12}, \quad Q_x = G_{13}kh\left(\Psi_x - \theta_1\right),$$

$$Q_y = G_{23}kh\left(\Psi_y - \theta_2\right),$$

где E_1, E_2 – модули упругости в направлениях x, y; G_{12}, G_{13}, G_{23} – модули сдвига в плоскостях xOy, xOz, yOz соответственно; μ_{12}, μ_{21} – коэффициенты Пуассона. В случае изотропного материала необходимо принять $E_1 = E_2 = E, \mu_{12} = \mu_{21} = \mu, G_{12} = G_{13} = G_{23} = G$. Функционал полной потенциальной энергии деформации оболочки, представляющий собой разность потенциальной энергии системы и работы внешних сил, будет иметь вид:

$$E_s = E_p - A, \quad (5)$$

$$E_p = \frac{1}{2}\int_{a_1}^{a}\int_0^b \Big[N_x\varepsilon_x + N_y\varepsilon_y + \frac{1}{2}\big(N_{xy}+N_{yx}\big)\gamma_{xy} + M_x\chi_1 + M_y\chi_2 + \big(M_{xy}+M_{yx}\big)\chi_{12} + $$
$$+Q_x(\Psi_x - \theta_1) + Q_y\big(\Psi_y - \theta_2\big)\Big]ABdxdy, \quad (6)$$
$$A = \int_{a_1}^{a}\int_0^b qWABdxdy.$$

1.2. Численные методы

Для выполнения расчетов, уравнения равновесия, которые представляют в совокупности систему дифференциальных уравнений в частных производных, можно не находить. Для определения неизвестных функций можно применить к функционалу полной потенциальной энергии деформации метод Ритца.

Метод Ритца позволяет свести вариационную задачу о нахождении минимума функционала к решению системы нелинейных алгебраических уравнений. Согласно этому методу, неизвестные функции $U(x,y)$, $V(x,y)$, $W(x,y)$, $\Psi_x(x,y)$, $\Psi_y(x,y)$, аппроксимируются в виде [15]:

$$U(x,y) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} u_{kl}\, X_1^k Y_1^l, \qquad V(x,y) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} v_{kl}$$

$$W(x,y) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} w_{kl}\, X_3^k Y_3^l \quad (7)$$

$$\Psi_x(x,y) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \psi_{x_{kl}}\, X_4^k Y_4^l,$$

$$\Psi_y(x,y) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \psi_{y_{kl}}\, X_5^k Y_5^l,$$

где u_{kl}, v_{kl}, w_{kl}, $\psi_{x_{kl}}$, $\psi_{y_{kl}}$ – искомые числовые параметры, $X_1^k - X_5^k$, $Y_1^l - Y_5^l$ – известные аппроксимирующие функции, которые удовлетворяют краевым условиям на контуре оболочки.

Предположим, что конструкция обладает симметрией относительно середины осей x и y. Тогда в качестве аппроксимирующих функций для шарнирно-неподвижного закрепления будем использовать следующие тригонометрические функции:

$$X_1^k = sin\left(2k\pi\frac{x-a_1}{a-a_1}\right), \quad X_2^k = sin\left((2k-1)\pi\frac{x-a_1}{a-a_1}\right), \quad X_3^k = sin\left((2k-1)\pi\frac{x-a_1}{a-a_1}\right),$$
$$X_4^k = cos\left((2k-1)\pi\frac{x-a_1}{a-a_1}\right), \quad X_5^k = sin\left((2k-1)\pi\frac{x-a_1}{a-a_1}\right), \quad Y_1^l = sin\left((2l-1)\pi\frac{y}{b}\right), \quad (8)$$
$$Y_2^l = sin\left(2l\pi\frac{y}{b}\right), \quad Y_3^l = sin\left((2l-1)\pi\frac{y}{b}\right), \quad Y_4^l = sin\left((2l-1)\pi\frac{y}{b}\right), \quad Y_5^l = cos\left((2l-1)\pi\frac{y}{b}\right).$$

Согласно методу Ритца, аппроксимирующие функции подставляются в функционал и находятся производные по неизвестным параметрам. Полученные выражения приравниваются к нулю. В результате получается система нелинейных алгебраических уравнений [15].

2. Алгоритм и программная реализации

Основные этапы вычислительного алгоритма включают в себя:

1) составление функционала полной потенциальной энергии деформации для рассматриваемой задачи;

2) поэлементное вычисление интегралов и запись результатов в словари;

3) нахождение вектора-градиента и матрицы Гессе;

4) выполнение итерационного процесса метода Ньютона;

5) построение графиков и сохранение их в файл.

Основная идея предлагаемого подхода заключается в разбиении полученного в ходе подстановки аппроксимации выражения на отдельные слагаемые, каждое из которых является двойным интегралом. Результаты вычисления этих интегралов предлагается сохранять в базе данных – поскольку тригонометрические функции разных аргументов будут повторяться, исчезнет необходимость в их повторном вычислении, что дает значительный прирост в производительности ПО. Далее это будет показано на конкретном примере.

Входные параметры конструкции

Рассмотрим пологую оболочку двоякой кривизны (параметры Ляме $A = 1$, $B = 1$, радиусы главных кривизн $R_1 = const$, $R_2 = const$, рис. 1). Линейные размеры вдоль осей координат $a = b = 5.4$ м, толщина $h = 0.01$ м, радиусы кривизны $R_1 = R_2 = 20.25$ м, материал – сталь с модулями упругости $E_1 = E_2 = 2.1 \cdot 10^5$ МПа и коэффициентами Пуассона $\mu_{12} = \mu_{21} = 0.3$.

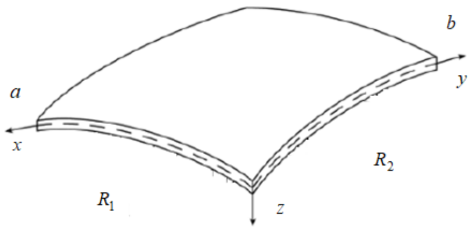

Рис. 1. Пологая оболочка двоякой кривизны

Поэлементное вычисление интегралов и запись результатов в словари. Для примера возьмем минимально возможное число неизвестных (пять), т.е. примем $N = 1$. После подстановки (8) в (7), а (7) в (6), получим выражение:

$$\int_{a_1}^{a}\int_{0}^{b}\Big[0.031u_{11}^4\sin(1.164x)^4\sin(0.582y)^4 + 0.031v_{11}^4\sin(1.164x)^4\sin(0.582y)^4 +$$
$$0.036v_{11}^2u_{11}^2\sin(1.164x)^2\sin(1.164y)^2\sin(0.582y)^2\sin(0.584x)^2 +$$
$$0.679\psi_{x11}^2\cos(0.582y)^2\cos(0.582x)^2 + 0.679\psi_{y11}^2\cos(0.582y)^2\cos(0.582x)^2 +$$
$$0.853w_{11}v_{11}^2u_{11}\sin(1.164x)\sin(1.164y)^2\sin(0.582y)^2\sin(0.582x)^2\cos(0.582x)+$$
$$0.853w_{11}v_{11}u_{11}^2\sin(1.164x)^2\sin(1.164y)\sin(0.582y)^2\cos(0.582y)\sin(0.582x)^2 +$$
$$1.357\psi_{y11}\psi_{x11}\cos(0.582y)^2\cos(0.582x)^2 +$$
$$+1.455w_{11}u_{11}^3\sin(1.164x)^3\sin(0.582y)^4\cos(0.582x)+$$
$$1.455w_{11}v_{11}^3\sin(1.164y)^3\cos(0.582y)\sin(0.582x)^4 + \quad (9)$$
$$+1005.236u_{11}^2\sin(1.164x)^2\cos(0.582y)^2 + \ldots[\,58\ \textit{слагаемых}\,]\ldots -$$
$$-76.612w_{11}^2u_{11}\sin(1.164x)\sin(0.582y)^3\sin(0.582x)\cos(0.582x)-$$
$$-76.612w_{11}^2v_{11}\sin(1.164y)\sin(0.582y)\cos(0.582y)\sin(0.582x)^3\Big]dydx.$$

В общей сложности, под знаком интегралов получилось 71 слагаемое. При повышении точности расчетов, их количество увеличивается на порядки (табл. 1).

Таблица 1

Количество слагаемых в зависимости от числа N

$n=\sqrt{N}$	N	Количество элементов
1	1	71
2	4	3561
3	9	56874
4	16	467236
5	25	2524375

При детальном рассмотрении выражения (9) видно, что разные сочетания аппроксимирующих функций и их производных повторяются, притом каждый раз на их вычисление затрачивается машинное время. В предлагаемом алгоритме расчета заложено отслеживание одинаковых подынтегральных выражений.

Для реализации алгоритма был выбран язык Python. Кроме того, учитывались правила вычисления интегралов, которые, в свою очередь, вытекают непосредственно из правил вычисления производных:

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,$$
$$\int f(x)+g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$$
$$\int f(x)-g(x)dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx.$$

Применяя данные правила, выражение можно привести к виду:

$$0.031u_{11}^4\int_{a_1}^{a} sin(1.164x)^4\,dx\int_0^b sin(0.582y)^4\,dy + 0.031v_{11}^4\int_{a_1}^{a} sin(1.164x)^4\,dx\int_0^b sin(0.582y)^4\,dy +$$
$$+0.036v_{11}^2u_{11}^2\int_{a_1}^{a} sin(1.164x)^2\sin(0.584x)^2dx\int_0^b \sin(1.164y)^2\sin(0.582y)^2\,dy +$$
$$0.679\psi_{x_{11}}^2\int_{a_1}^{a}\cos(0.582x)^2dx\int_0^b\cos(0.582y)^2dy + 0.679\psi_{y_{11}}^2\int_{a_1}^{a}\cos(0.582x)^2dx\int_0^b\cos(0.582y)^2dy +$$
$$+0.853w_{11}v_{11}^2u_{11}\int_{a_1}^{a}\sin(1.164x)\sin(0.582x)^2\cos(0.582x)dx\int_0^b\sin(1.164y)^2\sin(0.582y)^2dy +$$
$$+0.853w_{11}v_{11}u_{11}^2\int_{a_1}^{a}\sin(1.164x)^2\sin(0.582x)^2dx\int_0^b\sin(1.164y)\sin(0.582y)^2\cos(0.582y)dy +$$
$$1.357\psi_{y_{11}}\psi_{x_{11}}\int_{a_1}^{a} cos(0.582x)^2\,dx\int_0^b cos(0.582y)^2\,dy +$$
$$+1.455w_{11}u_{11}^3\int_{a_1}^{a} sin(1.164x)^3\,cos(0.582x)\,dx\int_0^b sin(0.582y)^4\,dy +$$
$$+1.455w_{11}v_{11}^3\int_{a_1}^{a} sin(0.582x)^4\,dx\int_0^b sin(1.164y)^3\,cos(0.582y)\,dy +$$
$$1005.236u_{11}^2\int_{a_1}^{a} sin(1.164x)^2\,dx\int_0^b cos(0.582y)^2\,dy + \ldots[\,58\ \textit{слагаемых}\,]\ldots -$$

$$-76.612w_{11}^2u_{11}\int_{a1}^{a}\sin(1.164x)\sin(0.582x)\cos(0.582x)dx\int_0^b\sin(0.582y)^3dy-$$

$$-76.612w_{11}^2v_{11}\int_{a1}^{a}\sin(0.582x)^3dx\int_0^b\sin(1.164y)\sin(0.582y)\cos(0.582y)dy.$$

При обработке подынтегральных выражений, программа определяет одинаковые. Их количество представлено в таблице 2.

При $n = 1$ надо вычислить 71 интеграл, но программа рассчитает лишь 23 и запишет их в словарь (dict) в виде ключ/значение (key/value), где ключом выступит сам интеграл, а значением ключа будет результат его вычисления.

Таблица 2

Количество повторений подынтегральных выражений

Подынтегральное выражение	Кол-во повторений	Подынтегральное выражение	Кол-во повторений
$\sin(1.164x)\sin(0.582x)\cos(0.582x)$	5	$\sin(1.164x)^2\sin(0.582x)^2$	3
$\sin(0.582x)^2\sin(1.164x)\cos(0.582x)$	3	$\sin(1.164x)^3\cos(0.582x)$	1
$\sin(1.164x)\cos(1.164x)\cos(0.582x)$	1	$\sin(1.164x)^2\cos(1.164x)$	1
$\cos(0.582x)^3\sin(1.164x)$	1	$\cos(0.582x)^2$	7
$\sin(1.164x)^2\cos(0.582x)^2$	1	$\sin(0.582x)^3$	6
$\sin(1.164x)\cos(0.582x)$	3	$\sin(0.582x)^2$	12
$\cos(0.582x)^2\sin(0.582x)$	4	$\sin(0.582x)^4$	5
$\sin(1.164x)^2\sin(0.582x)$	4	$\cos(0.582x)^4$	1
$\cos(1.164x)\sin(0.582x)$	2	$\cos(1.164x)^2$	1
$\sin(0.582x)^2\cos(1.164x)$	3	$\sin(1.164x)^2$	2
$\sin(0.582x)^2\cos(0.582x)^2$	3	$\sin(1.164x)^4$	1
$\cos(0.582x)^2\cos(1.164x)$	1		

Примечание: аналогично для y.

Порядок элементов в словаре не имеет значения, так как поиск происходит не методом перебора (смещения), а с помощью связанного с элементом уникального ключа (хэш). Словари в Python реализуются с помощью хэш-таблиц, представляющие собой массивы, индексы которых вычисляются с помощью хэш-функций. Цель хэш-функции – равномерно распределить ключи в массиве. Хорошая хэш-функция минимизирует количество коллизий, то есть вероятность того, что разные ключи будут иметь один хэш [16, 17]. Пример записи словаря:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Dict_x} = \{\sin(0.582x)^2 : 2.70000228\ 0,\ \cos(0.582x)^2 : 2.69999771\ 94,\\
&\sin(1.164x)^2 : 2.70000228\ 0,\ \cos(1.164x)^2 : 2.69999771\ 9,\\
&\sin(1.164x)^4 : 2.02500171\ 04,\ \sin(0.582x)^4 : 2.02500171\ 04,\\
&\cos(0.582x)^4 : 2.02499714\ 9,\ \sin(0.582x)^3 : 2.29183311\ 6,\\
&\sin(1.164x)^2\cos(1.164x) : \text{-}5.1020901\ 199\mathrm{e}\text{-}17,\\
&\cos(0.582x)^2\sin(0.582x) : 1.14591655\ 81,\ \sin(1.164x)\cos(0.582x) : 2.29183311\ 63,\\
&\cos(1.164x)\sin(0.582x) : \text{-}1.1459165\ 581,\ \sin(1.164x)^2\sin(0.582x) : 1.83346649\ 3,\\
&\sin(1.164x)^3\cos(0.582x) : 1.57154270\ 83,\ \cos(0.582x)^2\cos(1.164x) : 1.34999657\ 9,\\
&\sin(1.164x)^2\cos(0.582x)^2 : 1.35000114\ 0,\ \cos(0.582x)^3\sin(1.164x) : 1.37509986\ 97,\\
&\sin(0.582x)^2\cos(0.582x)^2 : 0.67500057\ 01,\ \sin(0.582x)^2\cos(1.164x) : \text{-}1.3500011\ 40,\\
&\sin(1.164x)^2\sin(0.582x)^2 : 1.35000114\ ,\ \sin(1.164x)\cos(1.164x)\cos(0.582x) : 0.45836662\ 32,\\
&\sin(1.164x)\sin(0.582x)\cos(0.582x) : 1.35000114\ 02,\\
&\sin(0.582x)^2\sin(1.164x)\cos(0.582x) : 0.91673324\ 65\}
\end{aligned}$$

Таким образом, при обнаружении повторяющихся интегралов, программа будет автоматически заменять их на значение, соответствующее ключу в словаре, и выражение примет вид:

$$
\begin{aligned}
E_{sf} &= 15.3238252\,7068\,\psi_{y11}\psi_{x11} + 756.305567\,2161\,u_{11}\psi_{y11} + 756.305567\,2161\,v_{11}\psi_{y11} + \\
&+ 16356.9230\,7698\,v_{11}u_{11} - 11.4507219\,2272\,v_{11}u_{11}^{2} - 11.4507219\,2272\,v_{11}^{2}u_{11} + \\
&+ 0.03297814\,3009\,v_{11}^{2}u_{11}^{2} + 10496.8375\,8749\,w_{11}\psi_{y11} + 10496.8375\,8749\,w_{11}\psi_{y11} + \\
&+ 5240.00442\,6065\,w_{11}u_{11} + 826.809547\,9374\,w_{11}u_{11}^{2} + 2.31538204\,8877\,w_{11}u_{11}^{3} + \\
&+ 5240.00442\,6065\,w_{11}v_{11} + 826.809547\,9374\,w_{11}v_{11}^{2} + 2.31538204\,8877\,w_{11}v_{11}^{3} + \\
&+ 11541.4806\,4747\,w_{11}^{2}u_{11} + 37.4366998\,2147\,w_{11}^{2}u_{11}^{2} + 11541.4806\,4747\,w_{11}^{2}v_{11} + \\
&+ 37.4366998\,2147\,w_{11}^{2}v_{11}^{2} + 317.801618\,1330\,w_{11}^{3}u_{11} + 317.801618\,1330\,w_{11}^{3}v_{11} - \\
&- 578.257591\,1920\,w_{11}v_{11}u_{11} + 0.52764984\,2471\,w_{11}v_{11}u_{11}^{2} + 0.52764984\,2471\,w_{11}v_{11}^{2}u_{11} + \\
&+ 8.44239034\,856\,w_{11}^{2}v_{11}u_{11} + 9041.14378\,5527\,\psi_{x11}^{2} + 9041.14378\,5527\,\psi_{y11}^{2} + \\
&+ 106177.957\,0421\,u_{11}^{2} - 3.44553938\,6687\text{e-}15\,u_{11}^{3} + 0.06331128\,137574\,u_{11}^{4} + \\
&+ 106177.957\,0421\,v_{11}^{2} - 3.44553938\,6687\text{e-}15\,v_{11}^{3} + 0.06331128\,137574\,v_{11}^{4} + \\
&+ 6586.80821\,7635\,w_{11}^{2} - 1185.18518\,5178\,w_{11}^{3} + 2597.93445\,7778\,w_{11}{}^{4}.
\end{aligned}
$$


```
8002 7d71 0028 6373 796d 7079 2e63 6f72
652e 706f 7765 720a 506f 770a 7101 6373
796d 7079 2e66 756e 6374 696f 6e73 2e65
6c65 6d65 6e74 6172 792e 7472 6967 6f6e
6f6d 6574 7269 630a 7369 6e0a 7102 6373
796d 7079 2e63 6f72 652e 6d75 6c0a 4d75
6c0a 7103 6373 796d 7079 2e63 6f72 652e
6e75 6d62 6572 730a 466c 6f61 740a 7104
284b 0058 0e00 0000 3134 3162 3265 3539
6166 3965 6266 7105 4ac9 ffff ff4b 3574
7106 8571 0752 7108 7d71 0958 0500 0000
5f70 7265 6371 0a4b 3573 6263 7379 6d70
792e 636f 7265 2e73 796d 626f 6c0a 5379
6d62 6f6c 0a71 0b58 0100 0000 7871 0c85
710d 5271 0e7d 710f 580c 0000 005f 6173
7375 6d70 7469 6f6e 7371 1063 7379 6d70
792e 636f 7265 2e61 7373 756d 7074 696f
6e73 0a53 7464 4661 6374 4b42 0a71 1129
8171 1228 580b 0000 0063 6f6d 6d75 7461
7469 7665 7113 8858 0400 0000 7a65 726f
7114 4e58 0800 0000 706f 7369 7469 7665
7115 4e58 0600 0000 6669 6e69 7465 7116
4e58 0800 0000 6e65 6761 7469 7665 7117
4e58 1100 0000 6578 7465 6e64 6564 5f6e
6567 6174 6976 6571 184e 5811 0000 0065
7874 656e 6465 645f 706f 7369 7469 7665
7119 4e58 1400 0000 6578 7465 6e64 6564
5f6e 6f6e 706f 7369 7469 7665 711a 4e58
1400 0000 6578 7465 6e64 6564 5f6e 6f6e
6e65 6761 7469 7665 711b 4e58 0800 0000
696e 6669 6e69 7465 711c 4e58 0d00 0000
616e 7469 6865 726d 6974 6961 6e71 1d4e
5809 0000 0068 6572 6d69 7469 616e 711e
4e58 0700 0000 636f 6d70 6c65 7871 1f4e
5809 0000 0069 6d61 6769 6e61 7279 7120
4e58 0d00 0000 6578 7465 6e64 6564 5f72
```


Рис. 2. Пример записи в файл с применением модуля Pickling

```
sin(0.1570795*x)**2:10.000008446645785
sin(0.1570795*x)**4:7.50000633498434
cos(0.1570795*x)**2:9.999991553354215
cos(0.314159*x)**2:9.999991553354214
sin(0.1570795*x)*cos(0.1570795*x)**2:4.244135400629273
cos(0.1570795*x)**2*cos(0.314159*x):4.999987330031323
sin(0.314159*x)*cos(0.1570795*x):8.488270801258546
cos(0.1570795*x)**4:7.499989441692769
sin(0.1570795*x)**2*cos(0.314159*x):-5.000004223322891
sin(0.1570795*x)*cos(0.314159*x):-4.244135400674099
sin(0.1570795*x)**2*cos(0.1570795*x)**2:2.500002111661446
sin(0.1570795*x)*sin(0.314159*x)*cos(0.1570795*x):5.000004223322892
sin(0.1570795*x)**3:8.488270801303374
sin(0.314159*x)**2:10.000008446645785
cos(0.581775925925926*x)**2:2.6999977194056384
sin(0.581775925925926*x)**3:2.291833116351911
cos(0.581775925925926*x)**4:2.024997149257048
sin(1.16355185185185*x)*cos(0.581775925925926*x)**3:1.3750998697990493
sin(1.16355185185185*x)**2*cos(0.581775925925926*x)**2:1.350001140297186
sin(0.581775925925926*x)**2:2.700002280594362
sin(0.581775925925926*x)*cos(0.581775925925926*x)**2:1.1459165581699038
cos(0.581775925925926*x)**2*cos(1.16355185185185*x):1.349996579108452
sin(0.581775925925926*x)**2*sin(1.16355185185185*x)**2:1.35000114029718
sin(1.16355185185185*x)**3*cos(0.581775925925926*x):1.5715427083556006
sin(0.581775925925926*x)**2*cos(0.581775925925926*x)**2:0.6750005701485904
sin(0.581775925925926*x)*sin(1.16355185185185*x)**2:1.833466493081529
sin(0.581775925925926*x)*sin(1.16355185185185*x)*cos(0.581775925925926*x):1.3500011402971823
sin(0.581775925925926*x)*cos(1.16355185185185*x):-1.1459165581820123
sin(1.16355185185185*x)*cos(0.581775925925926*x)*cos(1.16355185185185*x):0.4583666232582795
cos(1.16355185185185*x)**2:2.699997719405634
sin(0.581775925925926*x)**2*sin(1.16355185185185*x)*cos(0.581775925925926*x):0.9167332465407643
sin(0.581775925925926*x)**2*cos(1.16355185185185*x):-1.350001140297184
sin(1.16355185185185*x)*cos(0.581775925925926*x):2.2918331163398142
sin(1.16355185185185*x)**2:2.700002280594367
sin(0.581775925925926*x)**4:2.0250017104457716
sin(1.16355185185185*x)**2*cos(1.16355185185185*x):-5.1020901199431716e-17
sin(1.16355185185185*x)**4:2.0250017104457747
cos(0.1570795*x)*cos(0.314159*x)*cos(0.4712385*x):4.999987330031322
sin(0.1570795*x)*sin(0.4712385*x)*cos(0.1570795*x)*cos(0.4712385*x):-2.5153490401663703e-16
sin(0.1570795*x)*sin(0.4712385*x):-9.020562075079397e-16
sin(0.1570795*x)**2*sin(0.4712385*x)**2:5.000004223322892
sin(0.4712385*x)**2:10.000008446645783
```

Рис. 3. Пример записи в текстовый файл

Для ускорения данного процесса, расчет интегралов по переменной x и y происходит параллельно. Словарь также записывается в файл решенных интегралов, что в дальнейшем позволит подгружать этот файл в проект и производить многопоточную замену. При отсутствии интеграла в файле, он будет автоматически добавлен в него.

Для записи словаря в файл используется модуль pickle. Модуль pickle реализует алгоритм сериализации и десериализации объектов Python. «Pickling» – процесс превращения объекта Python в поток байтов, а «unpickling» – обратная операция, в результате которой поток байтов преобразуется обратно в Python-объект. Так как поток байтов легко можно записать в файл, модуль pickle широко применяется для сохранения и загрузки сложных объектов в Python. Пример того, как словарь храниться в файле, показан на рисунке 2. Паралельно словарь записывается в текстовый файл для удобства прочтения (рис. 3).

Алгоритм можно представить в виде блок-схемы (рис. 4).

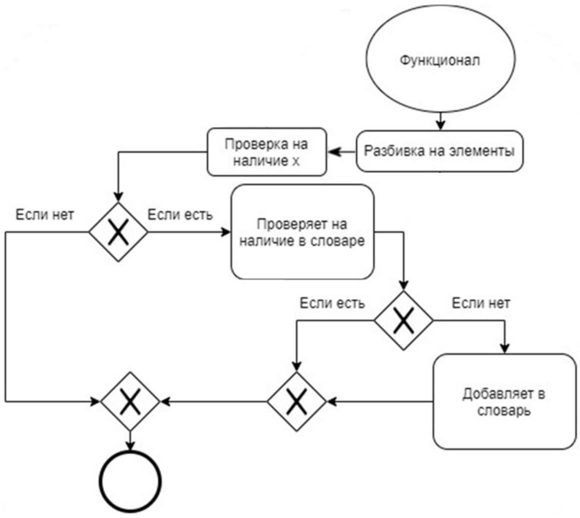

Рис. 4. Блок-схема алгоритма

На рисунке 5 показано сравнение времени выполнения расчета для рассматриваемой задачи:

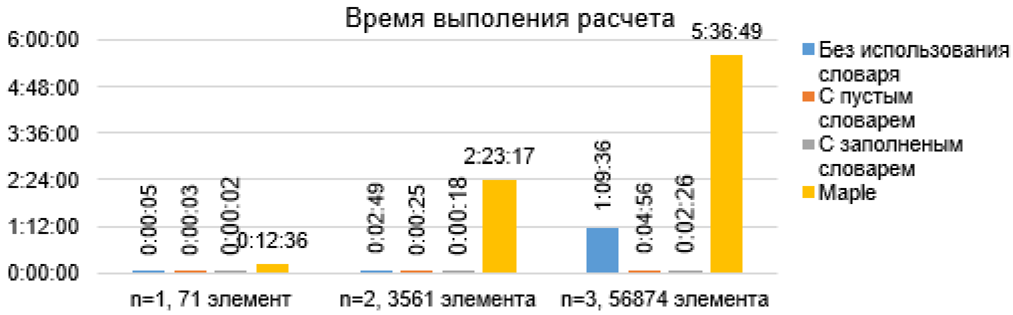

Рис. 5. Время выполнения расчета

3. Расчеты

Результатом исследования оболочечной конструкции на устойчивость является график зависимости «нагрузка – прогиб», где критической нагрузке соответствует момент разрыва кривой (переход на новое равновесное состояние). Для указанной ранее пологой оболочки двоякой кривизны были получены следующие данные: при $n = 1$, $n = 2$ (рис. 6), $n = 3$ (рис. 7). На рис. 8 показано их сравнение друг с другом. Значения критических нагрузок потери устойчивости показаны в таблице 3.

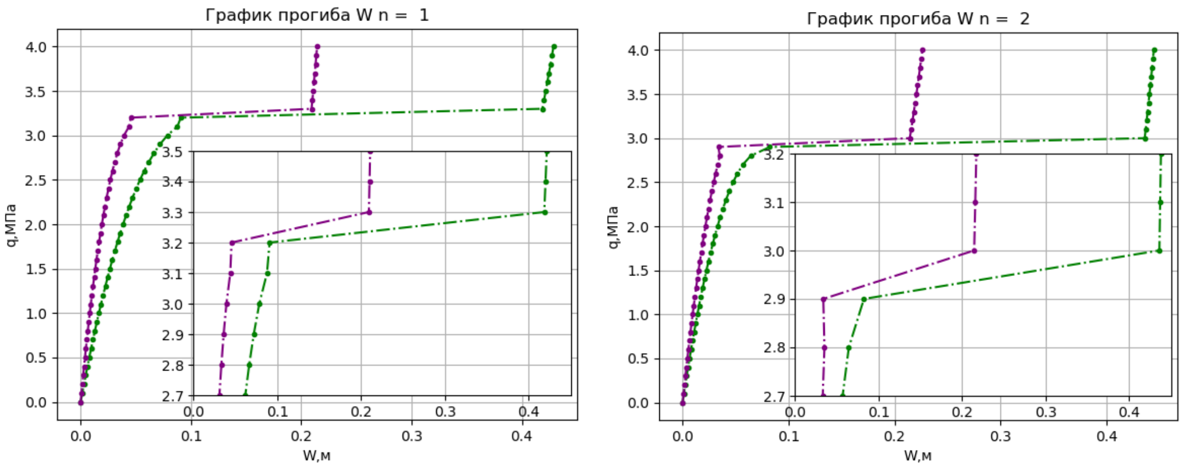

Рис. 6. Графики «нагрузка – прогиб» при $n = 1$ и $n = 2$

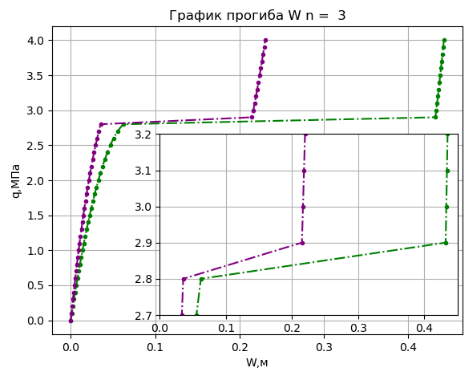

Рис. 7. График «нагрузка – прогиб» при $n = 3$

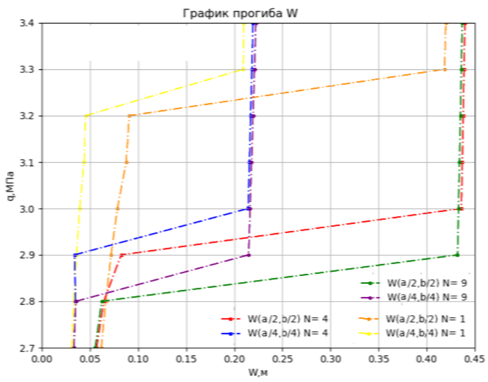

Рис. 8. Сравнение кривых при разных n

Таблица 3

Значения критических нагрузок потери устойчивости

$n = \sqrt{N}$	q_{cr}, МПа
1	3.19
2	2.86
3	2.86

Заключение

Снижение времени на обработку информации более чем в 100 раз является экономическим обоснованием для разработки эффективных алгоритмов. В данной работе было предложено решение по снижению временных затрат при исследовании тонкостенных оболочечных конструкций.

Предложенный алгоритм на основе применения словаря вычисленных интегралов, хэш-функций и базы данных, реализованный в Python, может быть использован в задачах расчета тонкостенных оболочечных конструкций и дальнейших исследованиях.

Список литературы

1. Raeesi A. Failure analysis of steel silos subject to wind load / A. Raeesi, H. Ghaednia, J. Zohrehheydariha, S. Das // Engineering Failure Analysis. – 2017. – Vol. 79. – Pp. 749–761. – DOI 10.1016/j.engfailanal.2017.04.031.
2. Krivoshapko S. N. Shell structures and shells at the beginning of the 21st century / S. N. Krivoshapko // Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. – 2021. – Vol. 17, № 6. – Pp. 553–561. – DOI 10.22363/1815-5235-2021-17-6-553-561.
3. Селиванов А. В. Результаты экспериментальных исследований железобетонной плиты-оболочки / А. В. Селиванов, Ф. Ф. Регер // Вестник Сибирского государственного автомобильно-дорожного университета. – 2019. – Т. 16, № 3(67). – С. 378–392.
4. Панин А. Н. Устойчивость пологих железобетонных ребристых оболочек / А. Н. Панин // Вестник гражданских инженеров. – 2012. – № 2(31). – С. 101–106.
5. Gavryushin S. S. Method of change of the subspace of control parameters and its application to problems of synthesis of nonlinearly deformable axisymmetric thin-walled structures / S. S. Gavryushin, A. S. Nikolaeva // Mechanics of Solids. – 2016. – Vol. 51, № 3. – С. 339–348. – DOI 10.3103/S0025654416030110.
6. Stupishin L. Numerical research orthotropic geometrically nonlinear shell stability using the mixed finite element method / L. Stupishin, K. Nikitin, A. Kolesnikov // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2017. – Vol. 201. – Pp. 012019. – DOI 10.1088/1757-899X/201/1/012019.
7. Алаева Д. Р. Методика исследования докритического и закритического деформирования оболочек при шарнирно-подвижном закреплении контура / Д. Р. Алаева, А. А. Семенов, В. В. Карпов // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. – 2020. – № 2 (32). – С. 49–53.
8. Stability analysis of acrylic glass pressure cylindrical shell considering creep effect / S. Xu и др. // Thin-Walled Structures. – 2022. – Vol. 181. – Pp. 110033. – DOI 10.1016/j.tws.2022.110033.
9. Wang J. Structural similitude for the geometric nonlinear buckling of stiffened orthotropic shallow spherical shells by energy approach / J. Wang, Z. L. Li, W. Yu // Thin-Walled Structures. – 2019. – Vol. 138. – Pp. 430–457. – DOI 10.1016/j.tws.2018.02.006.
10. Овчинников И. И. Коррозионно-механическое поведение оболочек вращения в силовом и температурном поле / И. И. Овчинников, В. С. Мавзовин // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. – 2020. – № 1 (31). – С. 38–43.
11. Бадриев И. Б. Осесимметричные задачи о геометрически нелинейном деформировании и устойчивости трехслойной цилиндрической оболочки с контурными подкрепляющими стержнями / И. Б. Бадриев, М. В. Макаров, В. Н. Паймушин, С. А. Холмогоров // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2017. – Т. 159, № 4. – С. 395–428.
12. Згода Ю. Н. Высокопроизводительный расчет тонкостенных оболочечных конструкций с использованием параллельных вычислений и графических ускорителей / Ю. Н. Згода, А. А. Семенов // Вычислительные технологии. – 2022. – № 6. – С. 45–57. – DOI 10.25743/ICT.2022.27.6.005.
13. Kumar Y. The Rayleigh–Ritz method for linear dynamic, static and buckling behavior of beams, shells and plates: A literature review / Y. Kumar // Journal of Vibration and Control. – 2017. – Vol. 24. The Rayleigh–Ritz method for linear dynamic, static and buckling behavior of beams, shells and plates, № 7. – Pp. 1205–1227. – DOI 10.1177/1077546317694724.
14. Kalitkin N. N. Solving the Cauchy problem with guaranteed accuracy for stiff systems by the arc length method / N. N. Kalitkin, I. P. Poshivaylo // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2015. – Vol. 7, № 1. – Pp. 24–35. – DOI 10.1134/S2070048215010044.
15. Карпов В. В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения : в 2 ч. / В. В. Карпов. – Ч. 1. Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. – Москва : Физматлит, 2010. – 288 с.
16. Стивенс Р. Алгоритмы. Теория и практическое применение / Р. Стивенс. – Москва : Э, 2016. – 544 с.
17. Любанович Б. Простой Python. Современный стиль программирования / Б. Любанович. – Санкт-Петербург : Питер, 2016. – 480 с.

Ссылка для цитирования:

Шаранин В. Ю., Семенов А. А. Алгоритм быстрого численного интегрирования в задачах устойчивости оболочечных конструкций // Инженерно-строительный вестник Прикаспия : научно-технический журнал / Астраханский государственный архитектурно-строительный университет. Астрахань : ГАОУ АО ВО «АГАСУ», 2023. № 2 (44). С. 133–140.