

## ФОРМИРОВАНИЕ МАТРИЦ ЖЕСТКОСТИ СТЕРЖНЯ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ПРИ ЕГО ИЗГИБЕ

*А. Е. Евсеев, И. Н. Гарькин, Э. Ю. Абдуллазянов*

**Евсеев Александр Евгеньевич**, кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика», Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза, Российская Федерация; e-mail: ae-73@yandex.ru;

**Гарькин Игорь Николаевич**, кандидат технических наук, заведующий кафедрой «Защита в чрезвычайных ситуациях», Московский государственный университет технологий и управления имени К. Г. Разумовского (Первый казачий университет), г. Москва, Российская Федерация; e-mail: igor\_garkin@mail.ru;

**Абдуллазянов Эдвард Юнусович**, кандидат технических наук, доцент, Лауреат премии правительства в области науки и техники РФ, ректор, Казанский государственный энергетический университет, г. Казань, Республика Татарстан, Российская Федерация; e-mail: kgeu@kgeu.ru

Построение матриц жесткости для элементов стержневой системы представляет собой элементарную задачу, когда не учитывается явление продольно-поперечного изгиба и рассматривается лишь статическое нагружение системы, не связанной с упругим основанием. Задача резко усложняется при деформационном расчете системы, связанной с упругим основанием под действием динамических нагрузок. Данная работа посвящена разработке методики построения матриц жесткости с использованием дифференциальных уравнений изогнутой оси стержня при различных статических и кинематических граничных условиях.

**Ключевые слова:** строительная механика, матрица жесткости, упругое основание, динамические нагрузки, дифференциальные уравнения.

## FORMATION OF THE ROD STIFFNESS MATRIX BY THE DIFFERENTIAL EQUATION DURING ITS BENDING

*A. Ye. Yevseyev, I. N. Garkin, E. Yu. Abdullazyanov*

**Yevseyev Aleksandr Yevgenyevich**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of Mechanics Department, Penza State University of Architecture and Construction, Penza, Russian Federation; e-mail: ae-73@yandex.ru;

**Garkin Igor Nikolayevich**, Candidate of Technical Sciences, Head of Protection in Emergency Situations Department, Moscow State University of Technology and Management named after K. G. Razumovsky (First Cossack University); Moscow, Russian Federation; e-mail: igor\_garkin@mail.ru;

**Abdullazyanov Edward Yunusovich**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Laureate of the Government Prize in the Field of Science and Technology of the Russian Federation, Rector, Kazan State Power Engineering University, Kazan, Republic of Tatarstan, Russian Federation; e-mail: kgeu@kgeu.ru

Construction of stiffness matrices for elements of a rod system is an elementary task when the phenomenon of longitudinal-transverse bending is not taken into account and only static loading of a system not connected to an elastic foundation is considered. The task becomes much more complicated during deformation calculation of a system connected to an elastic foundation under dynamic loads. This work is devoted to the development of a method for constructing stiffness matrices using differential equations of the bent axis of a rod under various static and kinematic boundary conditions.

**Keywords:** structural mechanics, stiffness matrix, elastic foundation, dynamic loads, differential equations.

### Введение

Рассмотрим произвольную плоскую стержневую систему, находящуюся под воздействием узловых статических или динамических (меняющихся по гармоническому закону) нагрузок. Ее элементы могут быть связаны с упругим винклеровским основанием.

Расчет такой системы будем вести методом конечных элементов в форме перемещений с учетом продольно-поперечного изгиба (деформационный расчет).

Построение матриц жесткости (МЖ) для элементов (стержней) такой системы представляет собой тривиальную задачу, когда не

учитывается явление продольно-поперечного изгиба и рассматривается лишь статическое нагружение системы, не связанной с упругим основанием. Как известно [3], МЖ в таком случае может быть построена либо исходя из общих матричных уравнений строительной механики, либо путем задания поля перемещений в виде кубического многочлена [4], либо, наконец, сформирована из табличных значений единичных реакций традиционного метода перемещений. Задача резко усложняется при деформационном расчете системы, связанной с упругим основанием, под действием динамических нагрузок.

Деформационный расчет статически неопределимых стержневых систем приходится осуществлять с использованием итерационных процедур или шаговым методом.

При применении шагового или итерационного метода Ньютона – Рафсона, помимо обычных матриц жесткости, приходится строить так называемые касательные МЖ. Опыт показывает, что лучше применять метод простых итераций, не требующий построения касательных матриц.

Н. Н. Шапошников предложил использовать для построения матриц жесткости дифференциальные уравнения изогнутой оси. Другие авторы, например, Т. Д. Караманский [4], Л. А. Розин [5], – приближенную методику построения, основанную на той или иной форме приближенного представления изогнутой оси элементов (поля перемещений). Это позволило им получить приближенные матрицы жесткости для некоторых частных случаев.

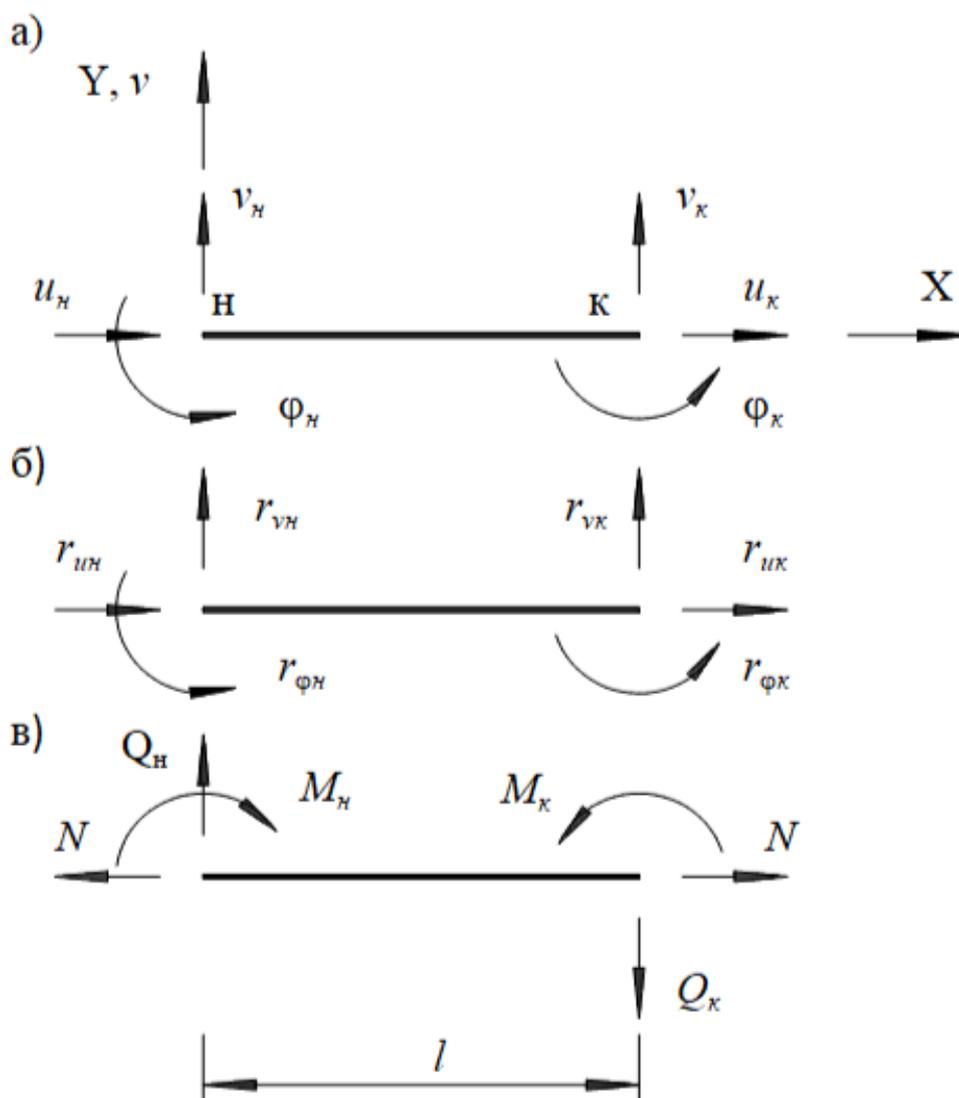


Рис. 1. Положительные направления перемещений, внутренних усилий и реакций концов стержня

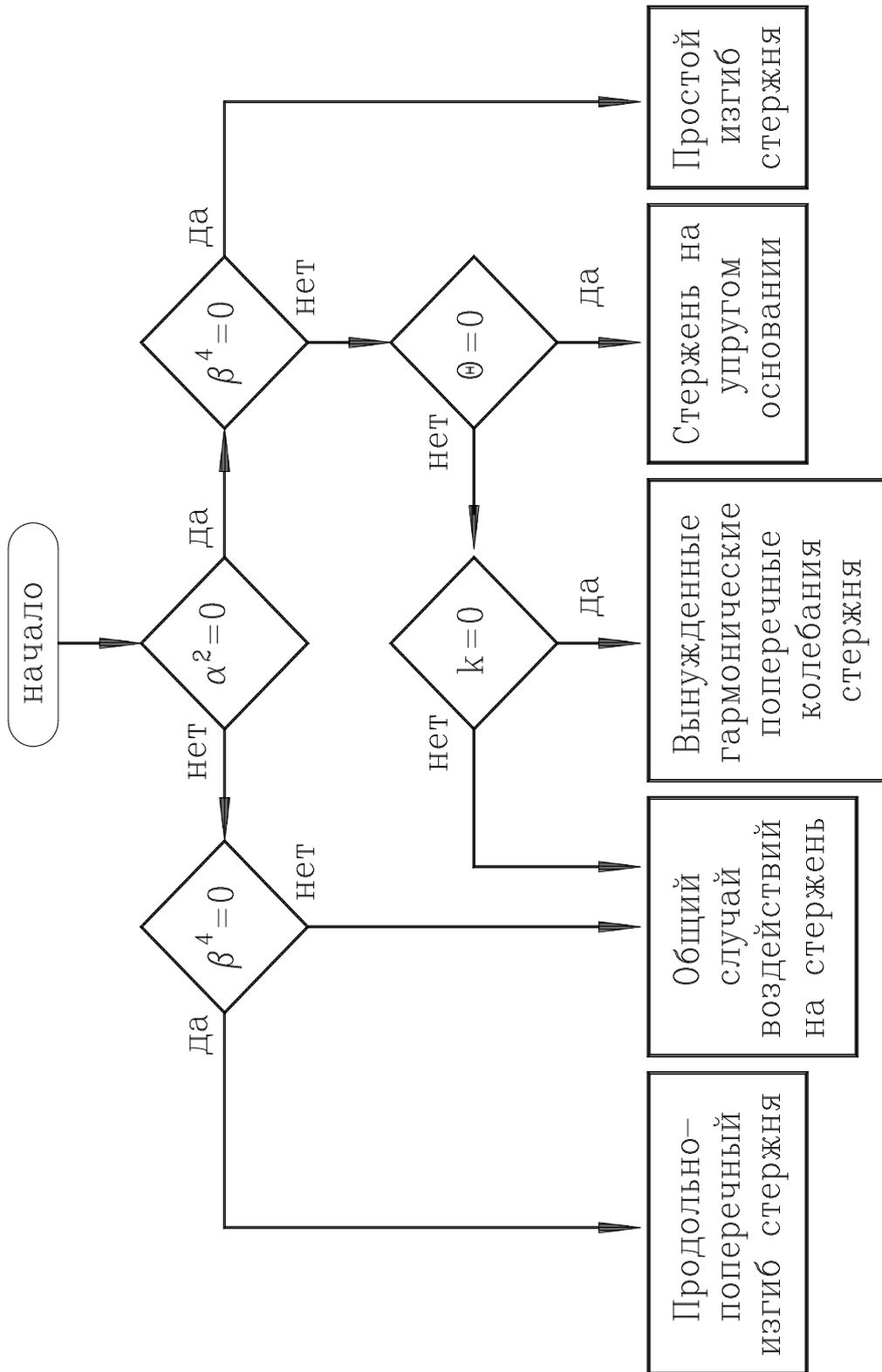


Рис. 2. Блок-схема выбора типа задачи

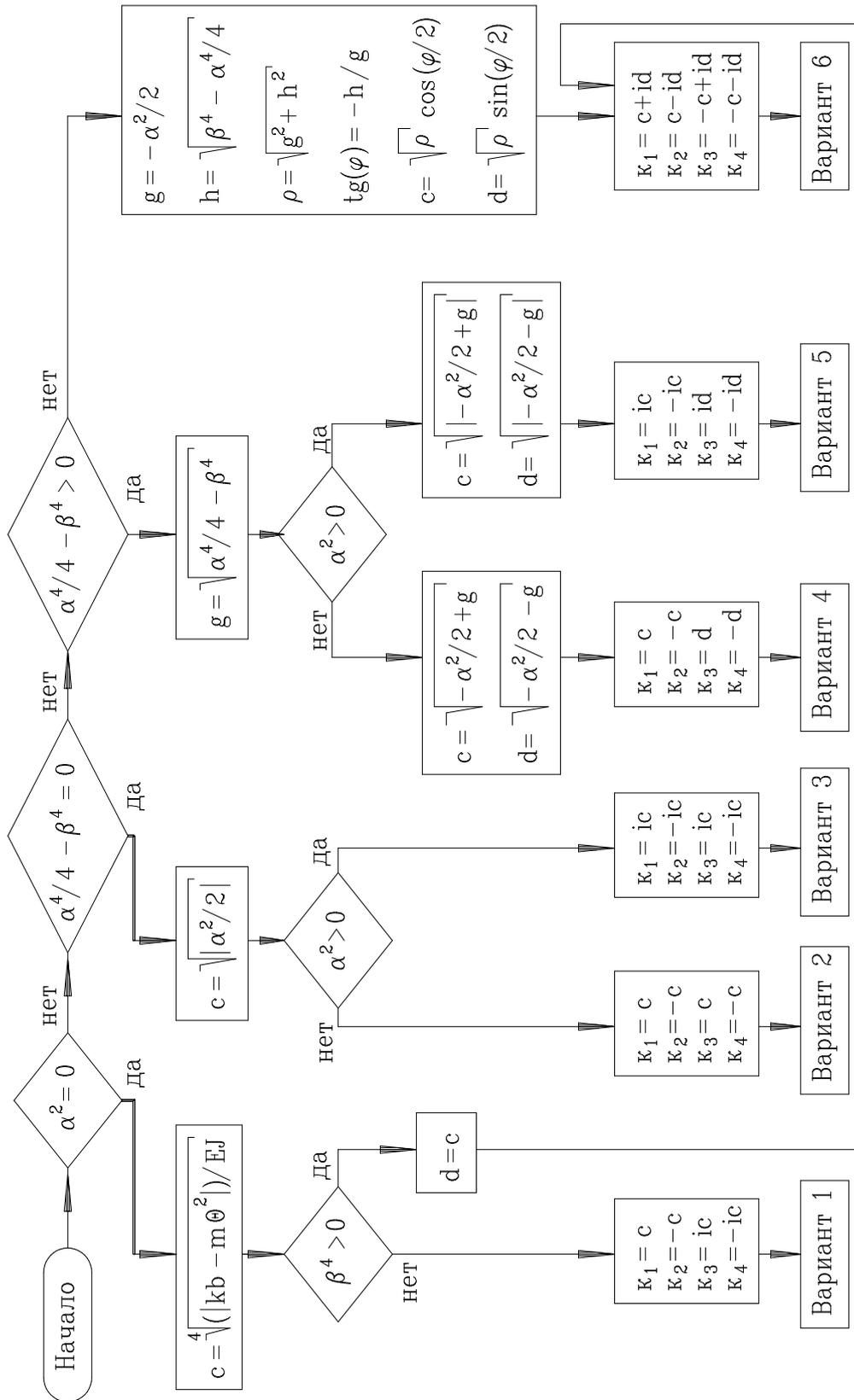


Рис. 3. Блок-схема выбора решения дифференциального уравнения

## Метод

В настоящей работе рассматриваются вопросы построения матриц жесткости для плоских стержневых систем в общем случае (продольно-поперечный изгиб, упругое основание, динамические нагрузки) с учетом сил внутреннего сопротивления по В. Фойгту и без их учета. Приводится обоснование точной (основанной на дифференциальном уравнении) и приближенной методик. Исследуется сходимость приближенных МЖ к точным, путем предельного перехода. Дается численная оценка точности приближенных матриц жесткости.

Анализируются прямолинейные стержни постоянного сечения, выполненные из линейно-упругого материала. МЖ строятся в местной (локальной) системе координат, связанной со стержнем. Конец стержня, расположенный в начале этой системы координат, обозначим «н», а другой – «к».

Матрица жесткости стержня состоит из двух частей, одна из которых отражает продольные реакции, а другая – изгибные. Эти части могут быть получены независимо друг от друга. Переход от локальной к глобальной системе координат может осуществляться общепринятым способом [3].

Введем обозначения:

- $l$  – длина стержня;
- $b$  – ширина стержня;
- $m$  – погонная масса стержня;
- $E$  – модуль упругости стержня;
- $J$  – момент инерции стержня;
- $F$  – площадь поперечного сечения стержня

и правила знаков, используемые в дальнейшем. На рисунке 1 изображен стержень в местной системе координат и указаны положительные направления перемещений (рис. 1 а), реакций (рис. 1 б) его концов и внутренних усилий (рис. 1 в).

Дифференциальное уравнение равновесия стержня, лежащего на упругом винклеровском основании, при установившихся вынужденных поперечных гармонических колебаниях от узловой нагрузки  $P(t) = P \cdot \sin(\Theta \cdot t)$  с учетом продольно-поперечного изгиба в перемещениях имеет вид:

$$\frac{\partial^4 V}{\partial x^4} \pm \frac{|N|}{E \cdot J} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{m}{E \cdot J} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{k \cdot b}{E \cdot J} \cdot V = 0, \quad (1)$$

где  $V = V(x, t)$  – функция прогибов стержня;  $N$  – внутренняя продольная сила в стержне;  $k$  – коэффициент постели упругого основания;  $t$  – время. Здесь знак «+» перед вторым слагаемым соответствует сжато-изогнутому стержню, а знак «-» – растянуто-изогнутому. Считаем, что функция прогибов также изменяется во времени по закону синуса

$$V = v(x) \cdot \sin(\Theta \cdot t), \quad (2)$$

где  $v = v(x)$  – амплитудная функция прогибов;  $\Theta$  – круговая частота поперечных колебаний. Подставляя (2) и производные от него в (1), получим дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня, записанное через амплитудную функцию прогибов:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} \pm \frac{|N|}{E \cdot J} \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{k \cdot b - m \cdot \Theta^2}{E \cdot J} \cdot v = 0. \quad (3)$$

Введем обозначения:

$$\alpha^2 = \pm \frac{|N|}{E \cdot J}, \quad \beta^4 = \frac{k \cdot b - m \cdot \Theta^2}{E \cdot J}. \quad (4)$$

С учетом этих обозначений дифференциальное уравнение (3) принимает вид:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + \alpha^2 \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} + \beta^4 \cdot v = 0. \quad (5)$$

Общее решение этого дифференциального уравнения может быть представлено в форме

$$v(x) = a_1 \cdot f_1(x) + a_2 \cdot f_2(x) + a_3 \cdot f_3(x) + a_4 \cdot f_4(x), \quad (6)$$

где  $f_i(x)$  – линейно-независимые решения дифференциального уравнения (5);  $a_i$  – произвольные постоянные,  $i = 1 \div 4$ .

Вид решений  $f_i(x)$  зависит от корней соответствующего характеристического уравнения. Запишем выражение (6) в матричной форме

$$v(x) = \vec{H}^T(x) \cdot \vec{a}, \quad (7)$$

где  $\vec{H}^T(x) = [f_1(x) \ f_2(x) \ f_3(x) \ f_4(x)]$  – вектор линейно-независимых решений дифференциального уравнения (3);  $\vec{a} = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4]^T$  – вектор произвольных постоянных.

Выразим вектор перемещений через общее решение (7) дифференциального уравнения (5) следующим образом:

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} v(0) \\ v'(0) \\ v(l) \\ v'(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{H}^T(0) \\ d\vec{H}^T(0)/dx \\ \vec{H}^T(l) \\ d\vec{H}^T(l)/dx \end{bmatrix} \cdot \vec{a} = L \cdot \vec{a}, \quad (8)$$

где  $L$  – квадратная матрица четвертого порядка, элементами которой являются значения функций  $f_i(x)$  и их производных  $f'_i(x)$  при  $x = 0$  и  $x = l$ . Исходя из этого выражения, вектор произвольных постоянных  $\vec{a}$  можно представить следующим образом:

$$\vec{a} = L^{-1} \cdot \vec{z}. \quad (9)$$

Теперь общее решение принимает вид

$$v(x) = \vec{H}^T(x) \cdot L^{-1} \cdot \vec{z}. \quad (10)$$

Для определения вектора реакций стержня  $\vec{r}$  воспользуемся известными дифференциальными зависимостями внутренних усилий от перемещений:

$$M = E \cdot J \cdot \frac{d^2 v}{dx^2}; \quad Q = E \cdot J \cdot \left( \frac{d^3 v}{dx^3} + \alpha^2 \cdot \frac{dv}{dx} \right).$$

Подставляя эти выражения в матрицу жесткости, получим:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} Q_H \\ -M_H \\ -Q_K \\ M_K \end{bmatrix} = E \cdot J \cdot \begin{bmatrix} v'''(0) + \alpha^2 \cdot v'(0) \\ -v''(0) \\ -v'''(L) - \alpha^2 \cdot v'(L) \\ v''(L) \end{bmatrix} =$$

$$= E \cdot J \cdot \begin{bmatrix} \frac{d^3 \vec{H}^T(0)}{dx^3} + \alpha^2 \cdot \frac{d \vec{H}^T(0)}{dx} \\ -\frac{d^2 \vec{H}^T(0)}{dx^2} \\ -\frac{d^3 \vec{H}^T(L)}{dx^3} - \alpha^2 \cdot \frac{d \vec{H}^T(L)}{dx} \\ \frac{d^2 \vec{H}^T(L)}{dx^2} \end{bmatrix} \cdot L^{-1} \cdot \vec{z} = L_1 \cdot L^{-1} \cdot \vec{z}. \quad (11)$$

Что позволяет определить матрицу жесткости как произведение двух матриц

$$r = L_1 \cdot L^{-1}. \quad (12)$$

Конкретный вид матриц  $L$  и  $L_1$  зависит от вида корней характеристического уравнения и типа решаемой задачи. Рассмотрим этот вопрос более подробно. Для этого проанализируем параметры  $\alpha^2$  и  $\beta^4$  (блок-схема этого анализа показана на рисунке 2).

Если  $\alpha^2 = 0, \beta^4 = 0$ , то имеем простой изгиб стержня. Матрица жесткости принимает вид, широко освещенный в литературе [1, 3].

Если  $\alpha^2 = 0, \beta^4 > 0$  и  $\Theta = 0$ , то получаем стержень на упругом основании.

Если  $\alpha^2 = 0, \beta^4 < 0$  и  $k = 0$ , то имеем вынужденные гармонические поперечные колебания стержня.

Если  $\alpha^2 > 0, \beta^4 = 0$ , то получаем сжато-изогнутый стержень.

Если  $\alpha^2 < 0, \beta^4 = 0$ , то имеем растянуто-изогнутый стержень.

Если  $\alpha^2 \neq 0, \beta^4 \neq 0$  или  $\alpha^2 = 0, k \neq 0, \Theta \neq 0$  – общий случай воздействий на стержень.

В общем случае воздействий для построения вектора решений  $\vec{H}$  требуется анализ влияния соотношений между значениями параметров  $\alpha^2$  и  $\beta^4$  на вид корней характеристического уравнения:

$$k^4 + \alpha^2 \cdot k^2 + \beta^4 = 0. \quad (13)$$

Для этого частного случая алгебраического уравнения четвертой степени решение может быть представлено в замкнутой форме [2]

$$k_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{-\alpha^2}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} - \beta^4}}. \quad (14)$$

Как показывает анализ этого выражения (блок-схема приведена на рисунке 3), возможны шесть вариантов вида корней характеристического уравнения (13), каждому из которых соответствует свой вектор решений  $\vec{H}$ . Вариант 1 (корни действительные и мнимые:  $k_1 = c, k_2 = -c, k_3 = i \cdot c, k_4 = -i \cdot c$ ):

$$\vec{H} = [e^{c \cdot x} e^{-c \cdot x} \cos(c \cdot x) \sin(c \cdot x)]^T. \quad (15)$$

Вариант 2 (корни действительные кратные:  $k_1 = k_3 = c, k_2 = k_4 = -c$ ):

$$\vec{H} = [e^{c \cdot x} e^{-c \cdot x} x \cdot e^{c \cdot x} x \cdot e^{-c \cdot x}]^T. \quad (16)$$

Вариант 3 (корни мнимые кратные:  $k_1 = k_3 = i \cdot c, k_2 = k_4 = -i \cdot c$ )

$$\vec{H} = [\cos(c \cdot x) \sin(c \cdot x) x \cdot \cos(c \cdot x) x \cdot \sin(c \cdot x)]^T. \quad (17)$$

Вариант 4 (корни действительные:  $k_1 = c, k_2 = d, k_3 = -c, k_4 = -d$ ):

$$\vec{H} = [e^{c \cdot x} e^{d \cdot x} e^{-c \cdot x} e^{-d \cdot x}]^T. \quad (18)$$

Вариант 5 (корни мнимые:  $k_1 = i \cdot c, k_2 = -i \cdot c, k_3 = i \cdot d, k_4 = -i \cdot d$ ):

$$\vec{H} = [\cos(c \cdot x) \sin(c \cdot x) \cos(d \cdot x) \sin(d \cdot x)]^T. \quad (19)$$

Вариант 6 (корни комплексные:  $k_1 = c + i \cdot d, k_2 = c - i \cdot d, k_3 = -c + i \cdot d, k_4 = -c - i \cdot d$ ):

$$\vec{H} = [e^{c \cdot x} \cdot \cos(d \cdot x) e^{c \cdot x} \cdot \sin(d \cdot x) e^{-c \cdot x} \cdot \cos(d \cdot x) e^{-c \cdot x} \cdot \sin(d \cdot x)]^T. \quad (20)$$

При построении матрицы жесткости  $r = L_1 \cdot L^{-1}$  в каждом конкретном случае обращение матрицы  $L$  необходимо осуществлять численно.

При получении матриц реакций целесообразнее представлять все варианты линейно-независимых решений дифференциального уравнения (5) в форме экспоненциальных функций действительного или комплексного переменного в зависимости от корней соответствующего характеристического уравнения. При этом постоянные интегрирования и соответствующие матрицы  $L$  и  $L_1$  также могут оказаться комплексными. Однако произведение этих матриц по формуле (12) даст действительные значения элементов МЖ. Такой подход упрощает процедуру выбора варианта решения дифференциального уравнения.

### Результаты и обсуждение

Покажем это на примере гармонических колебаний с учетом затухания по В. Фойгту для стержня, лежащего на упругом основании, при продольно-поперечном изгибе. Дифференциальное уравнение, описывающее движение такого стержня, имеет вид:

$$E \cdot J \cdot \left( \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \chi \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2 \partial t} \right) \pm |N| \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + m \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + k \cdot b \cdot v = 0. \quad (21)$$

Предположим, что узловая нагрузка и функция прогибов изменяются во времени по закону:

$$P(t) = P_0 \cdot e^{i \cdot \Theta \cdot t}, \quad (22)$$

$$V = v \cdot e^{i \cdot \Theta \cdot t}. \quad (23)$$

Выражение (23) можно разложить по формуле Эйлера

$$V = v \cdot (\cos(\Theta \cdot t) + i \cdot \sin(\Theta \cdot t)) = V_c + i \cdot V_s, \quad (24)$$

где  $V_c = v \cdot \cos(\Theta \cdot t)$  – функция прогибов при действии внешней нагрузки, изменяющейся по закону косинуса;  $V_s = v \cdot \sin(\Theta \cdot t)$  – функция прогибов при действии внешней нагрузки, изменяющейся по закону синуса.

Подставляя выражение (23) в (21), получим:

$$e^{i \cdot \theta \cdot t} \cdot \left( E \cdot J \cdot \frac{d^4 v}{dx^4} \cdot (1 + i \cdot \gamma) \pm |N| \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} + (k \cdot b - m \cdot \theta^2) \cdot v \right) = 0$$

или

$$\frac{d^4 v}{dx^4} \pm \frac{|N| \cdot (1 - i \cdot \gamma)}{E \cdot J \cdot (1 + \gamma^2)} \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{(k \cdot b - m \cdot \theta^2) \cdot (1 - i \cdot \gamma)}{E \cdot J \cdot (1 + \gamma^2)} \cdot v = 0. \quad (25)$$

Введем обозначения:

$$\alpha^2 = \pm \frac{|N| \cdot (1 - i \cdot \gamma)}{E \cdot J \cdot (1 + \gamma^2)}, \beta^4 = \frac{(k \cdot b - m \cdot \theta^2) \cdot (1 - i \cdot \gamma)}{E \cdot J \cdot (1 + \gamma^2)}$$

и получим полный аналог формулы (5) с той лишь разницей, что параметры  $\alpha^2$  и  $\beta^4$  здесь являются комплексными числами. Построение матрицы жесткости в этом случае совершенно

аналогично методике, изложенной выше. В дальнейшем при ее выводе следует иметь в виду, что элементы всех векторов и матриц, а также внутренние усилия будут комплексными.

В этом случае значительно упрощается алгоритм определения варианта общего решения дифференциального уравнения (25) в зависимости от значения параметров  $\alpha^2$  и  $\beta^4$ . Блок-схема представлена на рисунке 4. При этом для определения корней характеристического уравнения (13) использовалась формула (14).

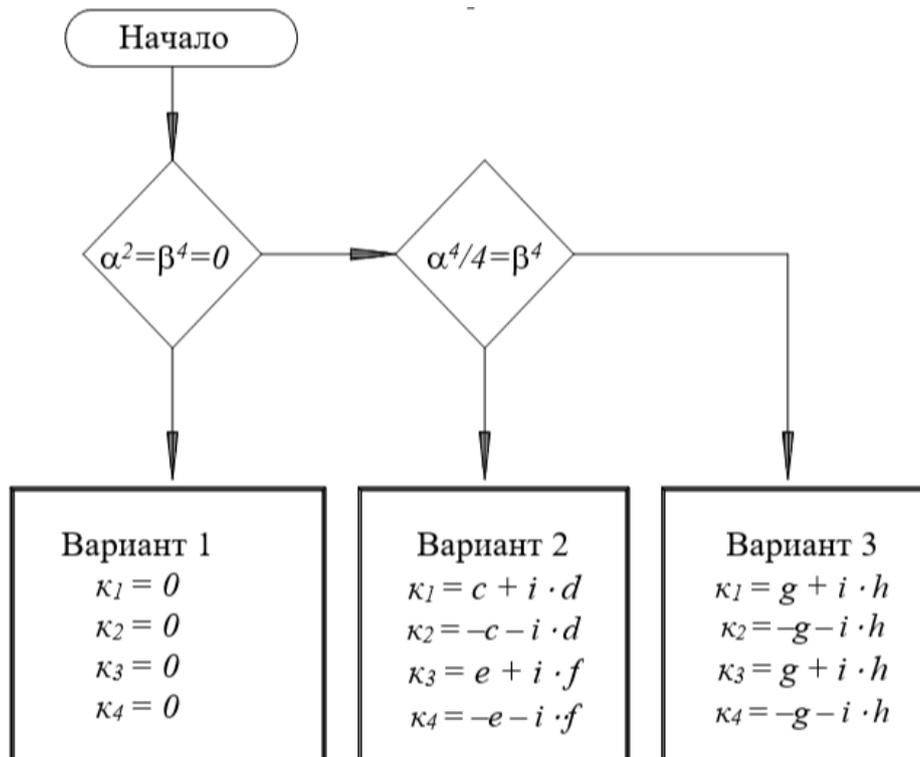


Рис. 4. Выбор варианта решения при комплексной матрице жесткости

Согласно обозначениям, принятым на этом рисунке, приведем возможные варианты вектора независимых решений  $\vec{H}$ :

Вариант 1 (все корни равны нулю:  $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = \kappa_4 = 0$ ):

$$\vec{H} = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3]^T. \quad (26)$$

Вариант 2 (корни комплексные несопряженные и не кратные:  $\kappa_1 = c + i \cdot d$ ,  $\kappa_2 = -c - i \cdot d$ ,  $\kappa_3 = e + i \cdot f$ ,  $\kappa_4 = -e - i \cdot f$ ):

$$\vec{H} = [e^{\kappa_1 \cdot x} \quad e^{\kappa_2 \cdot x} \quad e^{\kappa_3 \cdot x} \quad e^{\kappa_4 \cdot x}]^T. \quad (27)$$

Вариант 3 (корни комплексные несопряженные и кратные:  $\kappa_1 = g + i \cdot h$ ,  $\kappa_2 = -g - i \cdot h$ ,  $\kappa_3 = g + i \cdot h$ ,  $\kappa_4 = -g - i \cdot h$ ):

$$\vec{H} = [e^{\kappa_1 \cdot x} \quad e^{\kappa_2 \cdot x} \quad x \cdot e^{\kappa_3 \cdot x} \quad x \cdot e^{\kappa_4 \cdot x}]^T, \quad (28)$$

где значения величин  $c, d, e, f, g, h$  определяются численно для конкретных значений  $\alpha^2$  и  $\beta^4$ .

Матрица  $L$  строится согласно выражению (7). Для построения матрицы  $L_1$  необходимо найти амплитудные значения внутренних усилий  $M_0$  и  $Q_0$ . Изгибающий момент и поперечная сила при продольно-поперечном изгибе будут иметь вид:

$$M = E \cdot J \cdot \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \chi \cdot \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} \right), \quad (29)$$

$$Q = E \cdot J \cdot \left( \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \chi \cdot \frac{\partial^4 v}{\partial x^3 \partial t} \right) \pm |N| \cdot \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (30)$$

Подставим (23) в (29) и (30), получим:

$$M = e^{i \cdot \theta \cdot t} \cdot E \cdot J \cdot (1 + i \cdot \gamma) \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} = M_0 \cdot e^{i \cdot \theta \cdot t}, \quad (31)$$

$$Q = e^{i \cdot \theta \cdot t} \cdot E \cdot J \cdot (1 + i \cdot \gamma) \cdot \left( \frac{d^3 v}{dx^3} + \alpha^2 \cdot \frac{dv}{dx} \right) =$$

$$= Q_0 \cdot e^{i \cdot \Theta \cdot t}. \quad (32)$$

Тогда матрица  $L_1$  в общем случае имеет вид:

$$L_1 = E \cdot J \cdot (1 + i \cdot \gamma) \cdot \begin{bmatrix} d^3 \bar{H}^T(0)/dx^3 + \alpha^2 \cdot d \bar{H}^T(0)/dx & & & \\ & -d^2 \bar{H}^T(0)/dx^2 & & \\ & & -d^3 \bar{H}^T(l)/dx^3 - \alpha^2 \cdot d \bar{H}^T(l)/dx & \\ & & & d^2 \bar{H}^T(l)/dx^2 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Окончательно МЖ определяется как произведение двух матриц по формуле (12). Как указывалось выше, посредством использования комплексных чисел матрица реакций стержня стала прямо пропорциональна частотно-независимому фактору  $\gamma$  – коэффициенту неупругого сопротивления. Таким образом, недостаток гипотезы вязкого трения устранен

Путем решения системы уравнений, сформированной из матриц жесткости элементов всей стержневой системы, определяются амплитудные значения перемещений узлов стержневой системы, которые являются комплексными числами. Амплитудные значения линейных и угловых перемещений узлов стержневой системы могут быть найдены по формуле:

$$v_n = v_{n0} + i \cdot v_{nm} \quad (34)$$

или

$$v_n = v_{np} \cdot (\cos(\varphi_1) + i \cdot \sin(\varphi_1)) = v_{np} \cdot e^{i \cdot \varphi_1}, \quad (35)$$

где  $v_{np} = \sqrt{v_{n0}^2 + v_{nm}^2}$ ;  $tg(\varphi_1) = v_{nm}/v_{n0}$ .

Подставляя (35) в (23), можно получить значения этих перемещений в любой момент времени:

$$V_n = v_{np} \cdot e^{i \cdot \varphi_1} \cdot e^{i \cdot \Theta \cdot t} = v_{np} \cdot e^{i \cdot (\Theta \cdot t + \varphi_1)}. \quad (36)$$

Тогда в случае действия нагрузки, изменяющейся по закону синуса или косинуса, согласно (24), для  $n$ -ого перемещения можно соответственно записать:

$$V_{nc} = v_{np} \cdot \cos(\Theta \cdot t + \varphi_1), \quad (37)$$

$$V_{ns} = v_{np} \cdot \sin(\Theta \cdot t + \varphi_1). \quad (38)$$

### Заключение

Основные итоги данной работы заключаются в следующем:

1. Разработана методика построения матриц жесткости для плоских стержневых систем в общем случае (продольно-поперечный изгиб, упругое основание, динамические нагрузки) с учетом сил внутреннего сопротивления по В. Фойгту и без их учета;

2. Приводится обоснование точной (основанной на дифференциальном уравнении) и приближенной методик;

3. На примере гармонических колебаний с учетом затухания по В. Фойгту для стержня, лежащего на упругом основании, при продольно-поперечном изгибе рассматривается техника применения разработанной методики.

### Список литературы

1. Александров А. В. Методы расчета стержневых систем, пластин и оболочек с использованием ЭВМ : в 2 ч. / А. В. Александров, Б. Я. Лашеников, Н. Н. Шапошников, В. А. Смирнов ; под ред. А. Ф. Смирнова. – Москва : Стройиздат, 1976. – Ч. 1. – 248 с.
2. Бронштейн И. Н. Справочник по математике : пер. с нем. / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев ; под ред. Г. Гроше и В. Циглера. – Лейпциг : Тойбнер ; Москва : Наука, Физматгиз, 1981. – 718 с.
3. Дарков А. В. Строительная механика / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – Москва : Высшая школа, 1986. – 607 с.
4. Караманский Т. Д. Численные методы строительной механики : пер. с болг. / Т. Д. Караманский ; под ред. Г. К. Клейна. – Москва : Стройиздат, 1981. – 436 с.
5. Розин Л. А. Стержневые системы как системы конечных элементов / Л. А. Розин. – Ленинград : Ленинградский государственный университет, 1976. – 237 с.
6. Гарькин И. Н., Саденко Д. С. Деформативно-прочностные свойства монолитных железобетонных перекрытий / И. Н. Гарькин, Д. С. Саденко // Региональная архитектура и строительство. – 2020. – № 1 (42). – С. 126–129.
7. Евсеев А. Е. Колебания систем с одной степенью свободы: графическое представление действительных и комплексных корней характеристических уравнений / А. Е. Евсеев, И. А. Евсеев, И. Н. Гарькин // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. – 2023. – № 1 (43). – С. 56–61.
8. Кузин Н. Я., Багдоев С. Г. Оценка внешних факторов на несущую способность конструкций гражданских зданий / Н. Я. Кузин, С. Г. Багдоев // Региональная архитектура и строительство. – 2012. – № 2. – С. 79–82.
9. Гарькин И. Н. Подкрановые конструкции на предприятиях Пензенской области: состояние, перспективы / И. Н. Гарькин // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. – 2017. – № 3 (21). – С. 20–24.
10. Мирхасанов Р. Ф. Использование металлического каркаса как преобладание формы над содержанием в объемно-пространственной композиции / Р. Ф. Мирхасанов, Л. С. Сабитов, И. Н. Гарькин // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. – 2023. – № 1 (43). – С. 61–65.
11. Тер-Мартirosян З. Г. Перемещение длинного стержня сквозь песчаный образец под действием динамической нагрузки / З. Г. Тер-Мартirosян // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. – 2022. – № 3 (41). – С. 27–31. – DOI 10.52684/2312-3702-2022-41-3-27-31.
12. Стрелков Ю. М. Технологические особенности конструирования сборно-разборного фундамента под башенные сооружения / Ю. М. Стрелков, Л. С. Сабитов, С. В. Клюев, А. В. Клюев, О. В. Радайкин, Л. А. Токарева // Строительные материалы и изделия. – 2022. – Т. 5, № 3. – С. 17–26. – DOI 10.58224/2618-7183-2022-5-3-17-26.
13. Зинькова В. А. Оптимизация структуры трубчатых ферм / В. А. Зинькова, Л. С. Сабитов // Научные труды Кубанского государственного технического университета. – 2022. – № 5. – С. 22–29.
14. Колобанов А. С. Об особенностях работ тонколистовых стальных конструкций в условиях агрессивных сред / А. С. Колобанов, Н. В. Тарасова, Д. С. Сорокина, Л. С. Сабитов, А. В. Гречишкин // Инженерный вестник Дона. – 2023. – № 7 (103). – С. 277–285.

15. Чепурненко В. С. Совершенствование расчета гибких трубобетонных колонн с учетом обжатия в плоскостях сечений / В. С. Чепурненко, К. Н. Хашхожев, С. Б. Языев, А. А. Аваков // Строительные материалы и изделия. – 2021. – Т. 4, № 3. – С. 41–53.

© А. Е. Евсеев, И. Н. Гарькин, Э. Ю. Абдуллазянов

**Ссылка для цитирования:**

Евсеев А. Е., Гарькин И. Н., Абдуллазянов Э. Ю. Формирование матриц жёсткости стержня по дифференциальному уравнению при его изгибе // Инженерно-строительный вестник Прикаспия : научно-технический журнал / Астраханский государственный архитектурно-строительный университет. Астрахань : ГБОУ АО ВО «АГАСУ», 2024. № 3 (49). С. 57–65.

УДК 625.731; 627.8

DOI 10.52684/2312-3702-2024-49-3-65-73

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ УСТОЙЧИВОСТИ  
ГРУНТОВЫХ ПЕРЕМЫЧЕК ПЛОТИН**

*С. С. Рекунов, Н. В. Купчикова, И. В. Федосюк*

**Рекунов Сергей Сергеевич**, кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «Строительная механика», Волгоградский государственный технический университет, г. Волгоград, Российская Федерация, тел.: + 7 (8442) 96-98-17; e-mail: rekunoff@mail.ru;

**Купчикова Наталья Викторовна**, кандидат технических наук, доцент кафедры «Строительные конструкции, здания и сооружения», Российский университет транспорта (РУТ МИИТ); старший научный сотрудник, научно-исследовательский институт городского транспорта города Москвы «МосТрансПроект», г. Москва, Российская Федерация; e-mail: kupchikova79@mail.ru;

**Федосюк Игорь Викторович**, главный инженер проекта, ООО «МКЛ Плюс», г. Волгоград, Российская Федерация; e-mail: iviktorovich34@mail.ru

В результате изучения влияния конструктивно-технологических решений устройства перемычек как временных судоходных гидротехнических сооружений на фильтрационные процессы и устойчивость насыпи ядра плотины при эксплуатационных воздействиях проведено исследование потенциального разрушения перемычки при расчете на основное сочетание нагрузок с помощью численного моделирования. Выполнен анализ фильтрационной устойчивости методом конечных элементов при динамических воздействиях. Разработаны предложения для исключения скопления профильтровавшейся воды через тело перемычки.

**Ключевые слова:** фильтрационная устойчивость, конструктивно-технологические решения, перемычки, временные гидротехнические сооружения, сопряжения с грунтовым основанием.

**NUMERICAL SIMULATION OF FILTRATION STABILITY OF DAMS' GROUND BRIDGES**

*S. S. Rekunov, N. V. Kupchikova, I. V. Fedosyuk*

**Rekunov Sergey Sergeevich**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Construction Mechanics, Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation, tel.: + 7 (8442) 96-98-17; e-mail: rekunoff@mail.ru;

**Kupchikova Natalya Viktorovna**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department "Building Structures, Buildings and Structures", Russian University of Transport (RUT MIIT); Senior Researcher, Research Institute of Urban Transport of Moscow "MosTransProekt", Moscow, Russian Federation; e-mail: kupchikova79@mail.ru;

**Fedosyuk Igor Viktorovich**, Chief Project Engineer, MKL Plus LLC, Volgograd, Russian Federation; e-mail: iviktorovich34@mail.ru

As a result of studying the influence of structural and technological solutions for the device of bridges, as temporary navigable hydraulic structures on filtration processes and the stability of the embankment of the core of the dam under operational influences, the following were performed: analysis of structural and technological solutions for the device of bridges of the SGTS; analysis of methods for blocking the riverbed, as processes of gradual compression of the flow until the appearance of flow velocities that erode the riverbed and the filling