



**Ссылка для цитирования:**

Зарипова В. М., Аксютин И. В., Петрова И. Ю., Александров А. С. Автоматизация формирования рабочих программ дисциплин на основе анализа требований рынка труда // Инженерно-строительный вестник Прикаспия : научно-технический журнал / Астраханский государственный архитектурно-строительный университет. Астрахань : ГБОУ АО ВО «АГАСУ», 2024. № 3 (49). С. 83–92.

УДК 531.3 (075.8)

DOI 10.52684/2312-3702-2024-49-3-96-112

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ГАЛИЛЕЯ С УЧЕТОМ СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ В СРЕДЕ MAPLE

*А. В. Синельщиков, Е. В. Пономарева, Е. Д. Пономарева*

**Синельщиков Алексей Владимирович**, кандидат технических наук, доцент кафедры информационных технологий, Астраханский государственный университет им. В. Н. Татищева, тел. : + 7 (927) 282-62-11; e-mail: laex@bk.ru;

**Пономарева Елена Владимировна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Общеинженерные дисциплины и наземный транспорт», Астраханский государственный технический университет, тел. : + 7 (927) 566-50-32; e-mail: astpax@rambler.ru;

**Пономарева Елена Дмитриевна**, студент, Астраханский государственный технический университет, тел. : + 7 (917) 191-49-54; e-mail: elponedu@gmail.com

Поставлена и решена основная задача динамики при криволинейном движении материальной точки с учетом сил сопротивления как степенных функций скорости. Определены законы движения точки как функции времени, траектория, высота подъема, дальность и время полета. Проведен сравнительный анализ влияния начальных данных (начальной скорости и угла бросания) и силы сопротивления на вышеперечисленные параметры. Показаны графические зависимости от времени скорости и ускорения точки и их проекций на координатные оси. На базе составленных математических построены анимированные 2D-модели, наглядно иллюстрирующие движение точки и изменение векторов скоростей и ускорений. Сделаны выводы о перспективных направлениях развития вопроса.

**Ключевые слова:** механика, теоретическая механика, баллистика, динамика точки, параболическая траектория движения, траектория полета при стрельбе, математическое моделирование, дифференциальные уравнения движения точки.

## SOLUTION OF THE GALILEO PROBLEM TAKEN INTO ACCOUNT OF RESISTANCE FORCES IN THE MAPLE ENVIRONMENT

*A. V. Sinelshchikov, Ye. V. Ponomareva, Ye. D. Ponomareva*

**Sinelshchikov Alexey Vladimirovich**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of Information Technology Department, Astrakhan State University named after V. N. Tatishchev, phone: + 7 (927) 282-62-11; e-mail: laex@bk.ru;

**Ponomareva Elena Vladimirovna**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of General Engineering Disciplines and Land Transport, Astrakhan State Technical University, phone: + 7 (927) 566-50-32; e-mail: acmpax@rambler.ru;

**Elena Dmitrievna Ponomareva**, student, Astrakhan State Technical University, phone: + 7 (917) 191-49-54; e-mail: elponedu@gmail.com

The main problem of dynamics for curvilinear motion of a material point is formulated and solved, taking into account resistance forces as power functions of speed. The laws of motion of a point as a function of time, the trajectory of movement, flight range, ascent height, and flight time of the point are determined. A comparative analysis of the influence of initial data (initial speed and throwing angle) and resistance force on the above parameters was carried out. Graphical dependences of the speed and acceleration of a point and their projections on the coordinate axes are shown. Based on the compiled mathematical models, animated 2D models were built that clearly illustrate the movement of a point and the change in velocity and acceleration vectors. A comparative analysis of the results obtained was carried out, conclusions were drawn about promising directions for the development of the issue.

**Keywords:** *mechanics, theoretical mechanics, ballistics, dynamics of a point, parabolic trajectory of motion, flight path when shooting, mathematical modeling, differential equations of motion of a point.*

### Введение

Все, что мы наблюдаем во внешнем мире, начиная с рождения, – это различные формы движения и взаимодействия. Среди многообразных форм движения простейшей является механическая.

Что же такое движение? Это изменение положения материального тела по отношению к другим телам с течением времени. Несмотря на простоту данного понятия, человечеству потребовалось более тысячи лет, чтобы точно сформулировать и математически описать это явление. Причем очевидные сейчас для нас понятия пространства, времени и их точные определения появились сравнительно недавно.

Первые дошедшие до наших дней рукописи и научные обобщения в области механики принадлежат античным ученым Египта и Греции. В первую очередь это работы выдающегося философа древней Греции Аристотеля, по которым ученые много столетий подряд изучали законы окружающего мира.

Понимание механического движения не могло бы сформироваться без работ таких великих механиков прошлого, как Архимед, Птолемей, Леонардо да Винчи, Коперник, Галилей. Современное представление об устройстве и законах окружающего мира сформировано такими гигантами мысли, как И. Ньютон, Р. Гук, Ж. Лагранж, Л. Эйлер, М. Ломоносов, М. Остроградский, А. Ляпунов и т. д.

Ошибочно думать, что все великие открытия уже совершены. Сложность окружающего мира бесконечна. Каждые 10–20 лет человечеству открываются новые горизонты. Полет самолета был бы невозможен без работ Н. Жуковского, С. Чаплыгина; полеты в космос – И. Мещерского, К. Циолковского; современное кораблестроение – А. Крылова. Наверное, полное перечисление имен ученых, благодаря которым человек сейчас использует окружающие его вещи, заняло бы очень продолжительное время.

Сегодня теоретическая механика как наука представляет собой основу всех точных естественных наук. Она служит базой для всех технических дисциплин, имеющих целью использование сил природы для потребностей человека. Современное развитие науки и техники, в том числе вычислительной, позволяет нам, используя колоссальный опыт предшественников, «стоя на плечах гигантов», привносить возможности нашего времени в изучение как

классических задач механики, так и в постановку новых. Интерес к классическим задачам прошлого не ослабевает и по сей день, некоторые из них можно и сейчас переосмыслить, придав им современное звучание. Пример тому – возникшая еще в античности классическая задача о полете брошенного тела, решение которой волнует людей на протяжении многих веков и до наших дней.

### Исторический контекст развития вопроса

История вопроса о движении тела, брошенного в пространстве, для объяснения его поведения от момента бросания до попадания в цель началась с древних времен, когда человек стал использовать метательные орудия (МО). Примитивное ручное МО, повсеместно возникшее в глубокой древности (камень, копье, палица), усовершенствовалось и со временем трансформировалось в простейшие приспособления (пращи, копьеметалки, луки), что не только увеличило дальность поражения цели, но и значительно повысило точность бросания. Логичное развитие последующих античных метательных машин основано на применении принципов ручных МО, а именно на использовании потенциальной энергии деформированного упругого элемента и удлинения плеча метательного рычага для увеличения скорости объекта бросания.

В исторических источниках указано, что тяжелое метательное орудие появилось значительно позднее ручного в странах Древнего Востока (V век до нашей эры), обладало большими габаритами и массой, сооружалось непосредственно вблизи осаждаемой крепости. С развитием огнестрельного оружия в Средние века возникла необходимость в более глубоком осмыслении принципов полета брошенного тела.

Первые научные труды по этому вопросу были написаны в эпоху Возрождения, когда ученые для описания траекторий полета снарядов начали применять математические методы. Основным в доклассической механике был *вопрос о причине движения* после утраты движущимся телом контакта с исходным «двигателем» – рукой, бросающей камень, или тетивой лука, из которого выпускается стрела.

О *форме траектории полета* задумались только в XVI веке в связи с использованием в артиллерии орудий, ведущих навесную стрельбу при больших углах возвышения. Это

имел важное практическое значение, поскольку знание геометрической формы траектории использовалось для оценки дальности и высоты полета объектов.

Впервые вопрос о форме траектории был рассмотрен Н. Тартальей (1537). Тезис о параболичности при произвольном угле возвышения был сформулирован Б. Кавальери (1632) и Г. Галилеем (1638), оба доказали теорему о параболичности для случая стрельбы в горизонтальном направлении.

Решением вопроса определения траектории полета при стрельбе с положительным углом возвышения занимался английский ученый Т. Гарриот, который получил аналоги почти всех ключевых результатов Галилея по теории движения, включая геометрическое доказательство параболичности траектории снаряда при горизонтальной стрельбе. Более «прогрессивной» с точки зрения классической механики стала работа Б. Кавальери, который доказал параболичность траектории для случая горизонтальной стрельбы. Он заметил, что теорему можно также доказать для произвольного угла возвышения, а выпущенный под углом снаряд полетит вверх по параболической траектории, совпадающей с траекторией полета при горизонтальном выстреле, но в противоположном направлении (без точного доказательства). Окончательное решение данной проблема получила в работе Э. Торричелли (1644), в которой приведено первое корректное доказательство параболичности при произвольном угле возвышения.

#### Постановка и решение задачи в настоящее время

Задача о полете тела, брошенного под углом к горизонту, волновала ученых-механиков еще с античности, актуальна и интересна до настоящего времени. На примере ее классического решения ведется обучение студентов технических, строительных, военных вузов. Постановка и решение данной задачи входит в состав учебников и учебных пособий, в том числе электронного учебника (ЭУ) по теоретической механике [1–4], разработанного в 2003 году на базе кафедры «Теоретическая и прикладная механика» Астраханского государственного технического университета.

ЭУ [1–4] включает генератор универсальных профессионально-ориентированных заданий по теоретической механике, ранжируемых по уровню сложности и реализованных в среде математического пакета Maple [5, 6]. К набору имеющихся tws-программ по статике и кинематике [5, 6] добавлен новый блок

по динамике материальной точки [7, 8], которые не только генерируют по запросу пользователя тестовые задания с заданным уровнем сложности, но и позволяют автоматизировать расчеты динамических параметров движения весомой точки с отображением результатов в виде 2D-анимированных моделей.

Рассмотрим примеры реализации указанной методологии проведения технических расчетов по теме «Динамика точки». Основой является программа, предназначенная для решения типовой задачи динамики точки (на примере задачи Галилея), когда точка массой  $m$  брошена под углом  $\alpha$  к горизонту с начальной скоростью  $v_0$  и требуется определить закон движения, траекторию точки, дальность и время полета, высоту подъема, построить векторы скорости, нормального, касательного и полного ускорений. Ниже показано решение данной задачи в среде Maple в классической постановке при условии, что сопротивление воздуха при движении точки отсутствует. Listing программы приведен на рисунке 1.

#### Описание программы

Программа состоит из двух основных частей: 1) вычисление динамических параметров движения точки под действием заданных сил посредством решения дифференциальных уравнений движения при помощи команды **dsolve**; 2) построение 2D-анимированных моделей движения точки с отображением векторов скорости, ускорения и графиков их изменения с течением времени. В программе (рис. 1) последовательно задаются дифференциальные уравнения движения точки (**eq1, eq2**), конечные ( $x(T)=Dx, y(T)=0$ ) и начальные ( $x(0)=0, D(x)(0)=V[0]*\cos(\alpha)$ ,  $y(0)=0, D(y)(0)=V[0]*\sin(\alpha)$ ) условия, определяются основные кинематические параметры, проекции скорости и ускорения на оси координат. Модуль скорости и ускорения точки вычисляется по теореме Пифагора, используя при вводе арифметических квадратных корней команду **sqrt**.

Графические результаты выполнения разработанной программы (рис. 1) показаны на рисунках 2–6. Брошенная под углом  $\alpha$  к горизонтальной плоскости тяжелая точка движется в безвоздушном пространстве по параболе (рис. 2). Наибольшая горизонтальная дальность полета осуществляется при условии, что угол бросания составляет  $45^\circ$  (рис. 3). Графические зависимости скорости, ускорения точки и их проекций от времени показаны на рисунках 4 и 5. Если бросать точку с разными начальными скоростями  $V_1 > V_2 > V_3 > V_4$ , то дальность полета будет наибольшей в том

случае, когда и скорость бросания наибольшая (рис. 6).

Создана анимированная двухмерная модель движения точки (рис. 7).

Графическое отображение результатов выполнения разработанной программы (рис. 8) показано на рисунках 9–12.

Математические возможности пакета Maple позволяют решать не только типовые задачи динамики базового уровня сложности, но и проводить исследовательскую работу, варьируя исходные данные и анализируя их влияние на получаемые результаты. Авторами поставлена и решена основная задача динамики при криволинейном движении материальной точки для двух случаев: 1) без учета сил сопротивления (на ее примере апробирован алгоритм программы, см. рис. 1); 2) с учетом сил сопротивления, как степенных функций скорости (см. рис. 9). Для обоих случаев определены законы движения точки как

функции времени, траектория движения, высота подъема, дальность и время полета.

Проведен сравнительный анализ влияния начальных данных (начальной скорости и угла бросания) и силы сопротивления на вышеперечисленные параметры. Показаны графические зависимости от времени скорости, ускорения точки и их проекций на координатные оси  $x$  и  $y$ . Получены формулы и построены графические зависимости от времени для нормального и касательного ускорений точки. Кроме того, на базе составленных математических моделей построены анимированные 2D-модели, наглядно иллюстрирующие движение точки, изменение векторов скоростей и ускорений при этом. Подведем предварительные итоги и проанализируем влияние сопротивления воздуха на параметры полета точки при следующих исходных данных:

$V[0]=10$ ;  $\alpha=$   
 $\text{Pi}/4$ ;  $g=9.8$ ;  $m=0.5$ ;  $\mu=0.1$ ;  $t=1.379$ .

```
restart; with(plots): with(plottools):
# Дифференциальные уравнения движения точки:
dsolve([m*diff(x(t),t$2)=0,x(0)=0,D(x)(0)=V[0]*cos(alpha)],x(t));
dsolve([m*diff(y(t),t$2)=-m*g,y(0)=0,D(y)(0)=V[0]*sin(alpha)],y(t));
# Присвоим eq1 и eq2 соответственно значения x(t),y(t):
eq1:=x=V[0]*t*cos(alpha);
eq2:=y=-1/2*g*t^2+V[0]*t*sin(alpha);
# Траектория точки. Исключив из уравнений движения точки параметр t (время),
получим уравнение траектории точки:
simplify(subs(isolate(eq1,t),eq2));expand(%);
# Дальность полета (Dal):
solve(-1/2*g*x^2/V[0]^2/cos(alpha)^2+sin(alpha)*x/cos(alpha)=0,x);
Dal:=combine(2*sin(alpha)*V[0]^2*cos(alpha)/g);
# Высота подъема. Примем  $x=0,5*Dal$ , определим высоту подъема:
y:=-1/2*g*x^2/V[0]^2/cos(alpha)^2+sin(alpha)*x/cos(alpha);
x:=Dal/2; H:=normal(y,expanded);x:='x':
# Время полета:  $T:=Dal/(V[0]*cos(alpha))$ ;
# Скорость точки и ее проекции на координатные оси:
dsolve([m*diff(Vx(t),t)=0,Vx(0)=V[0]*cos(alpha)],Vx(t));
dsolve([m*diff(Vy(t),t)=-g*m,Vy(0)=V[0]*sin(alpha)],Vy(t));
v:=sqrt(Vx^2+Vy^2);
# Ускорение точки и его проекции на координатные оси:
Ax:=solve(m*Ax=0,Ax);
Ay:=solve(m*Ay=-m*g,Ay);
A:=simplify(sqrt(Ax^2+Ay^2),assume=positive);
# Касательное ускорение:
A[tau]:=diff(sqrt(V[0]^2*cos(alpha)^2+(-g*t+V[0]*sin(alpha))^2),t);
# Нормальное ускорение:
A[n]:=sqrt(A^2-A[tau]^2);
A[n]:=simplify(eval(A[n],A=g),assume=real);
```

Рис. 1. Листинг программы «Динамика точки без учета сил сопротивления»

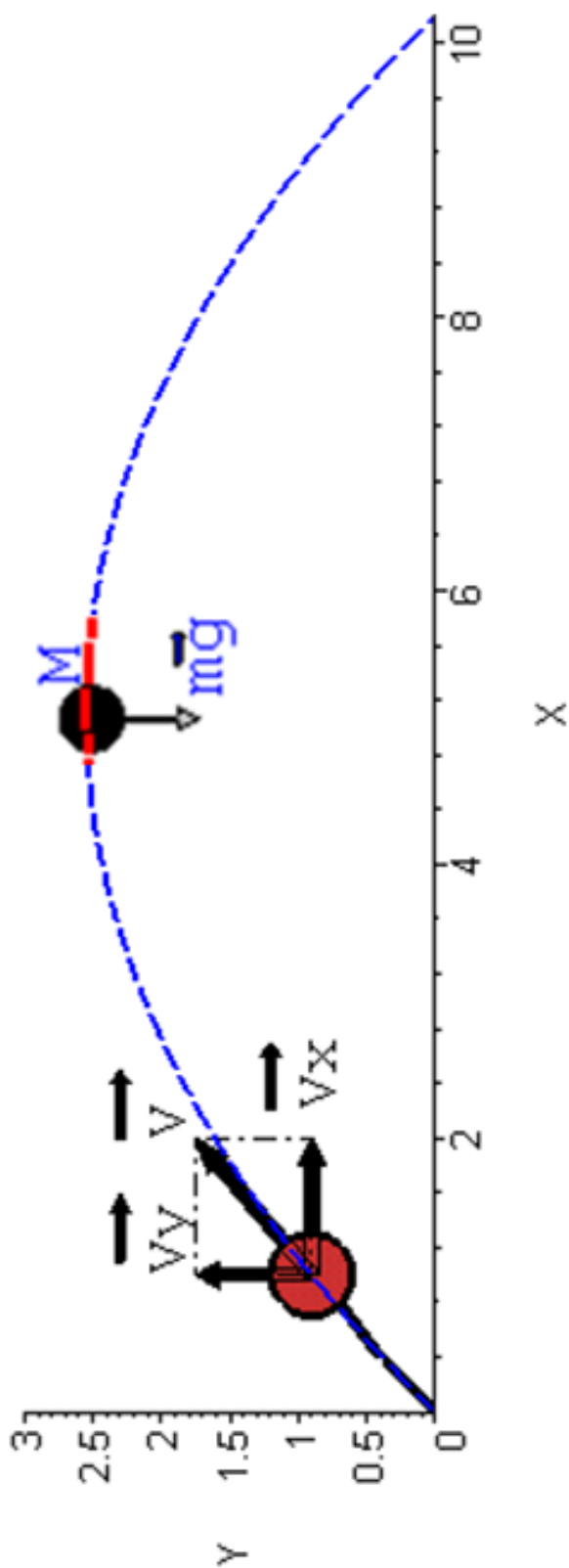


Рис. 2. Движение точки по параболе

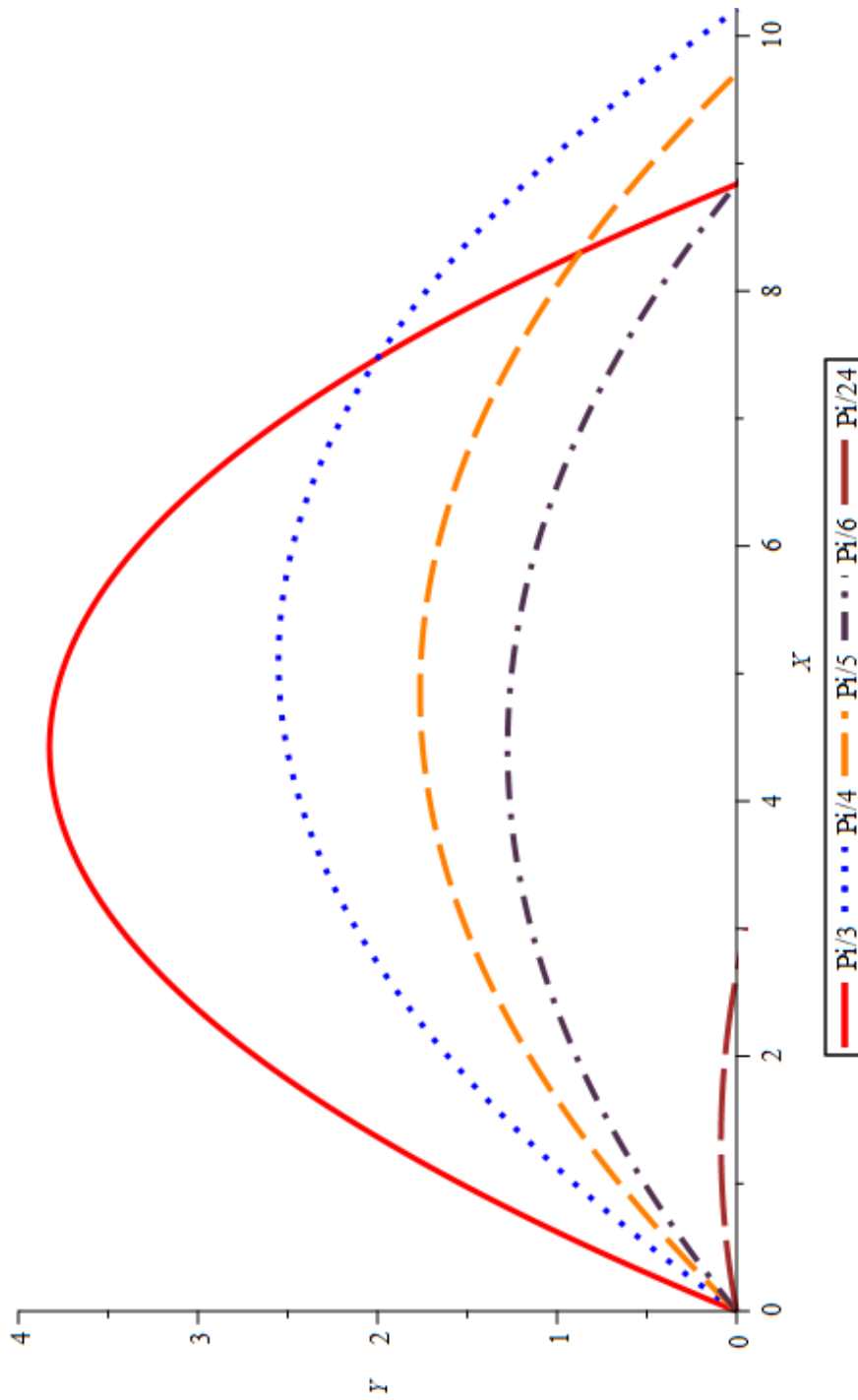


Рис. 3. Влияние угла бросания на траекторию, высоту подъема и дальность полета

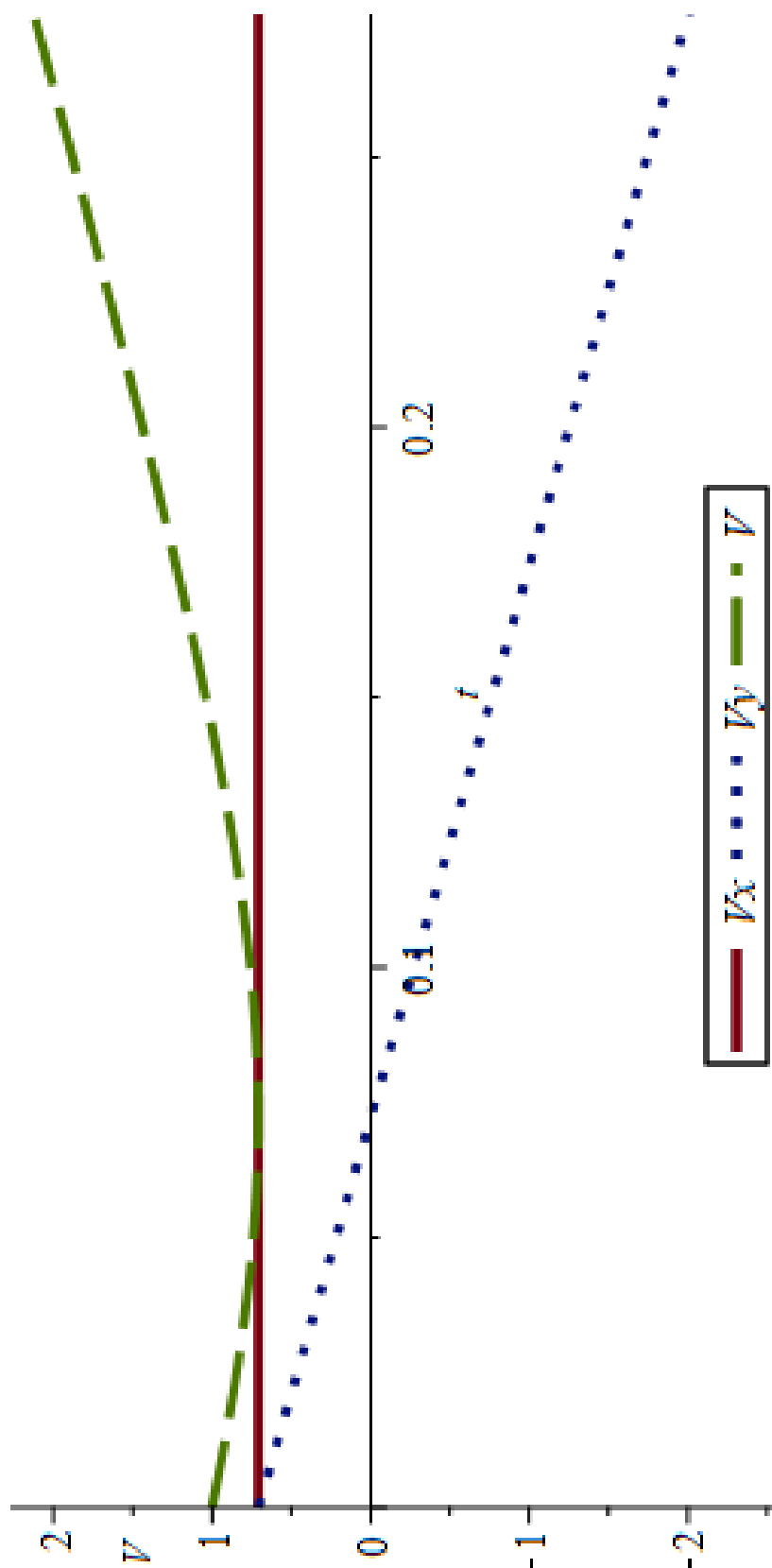


Рис. 4. Зависимость скорости и ее проекций от времени

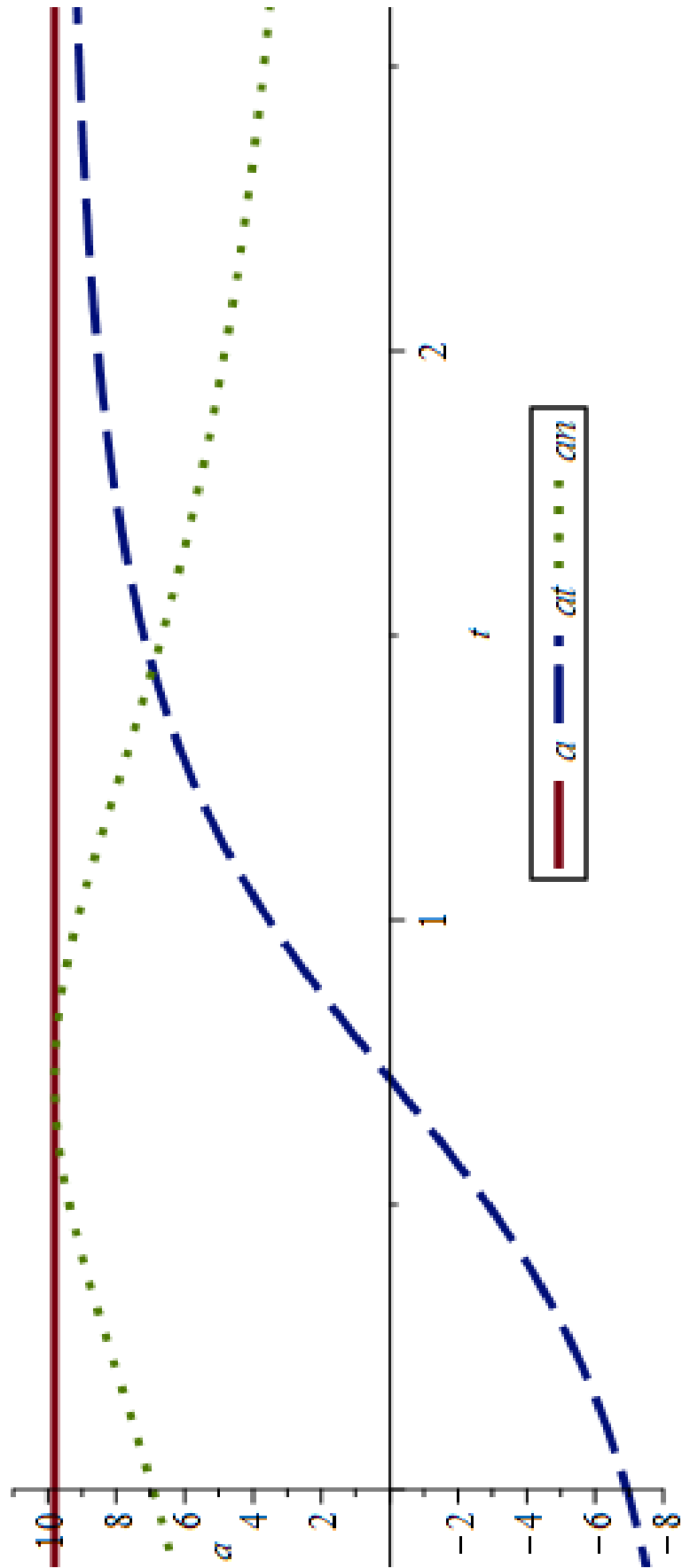


Рис. 5. Влияние начальной скорости бросания на дальность полёта и высоту подъёма



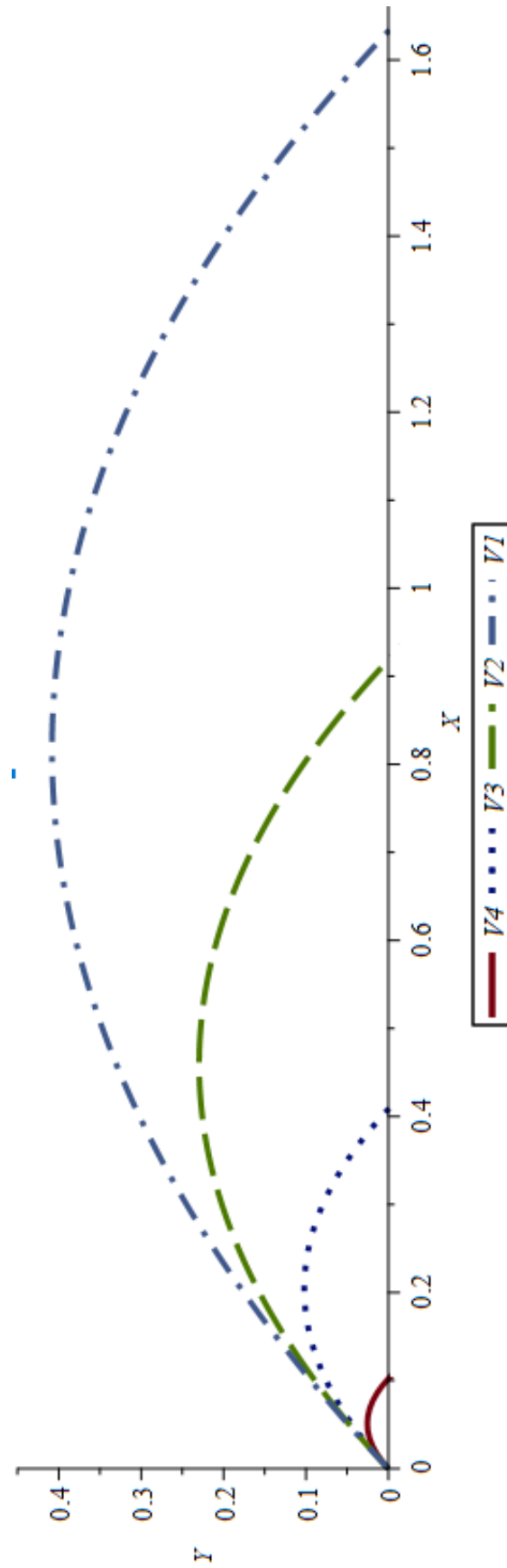


Рис. 6. Влияние начальной скорости бросания на дальность полета и высоту подъема

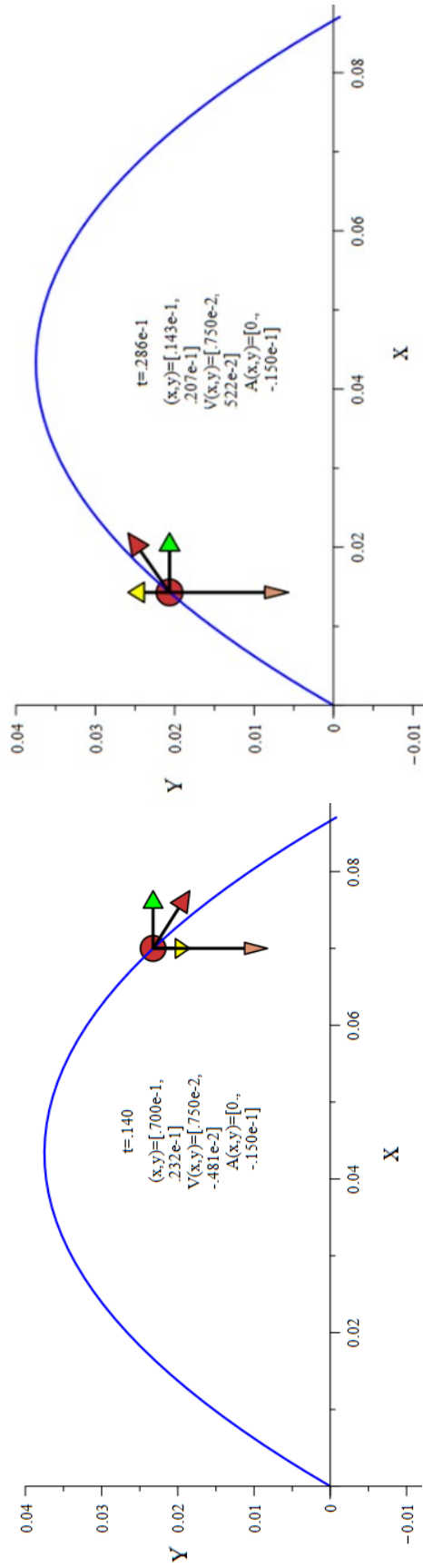


Рис. 7. Кадры 2D-анимации

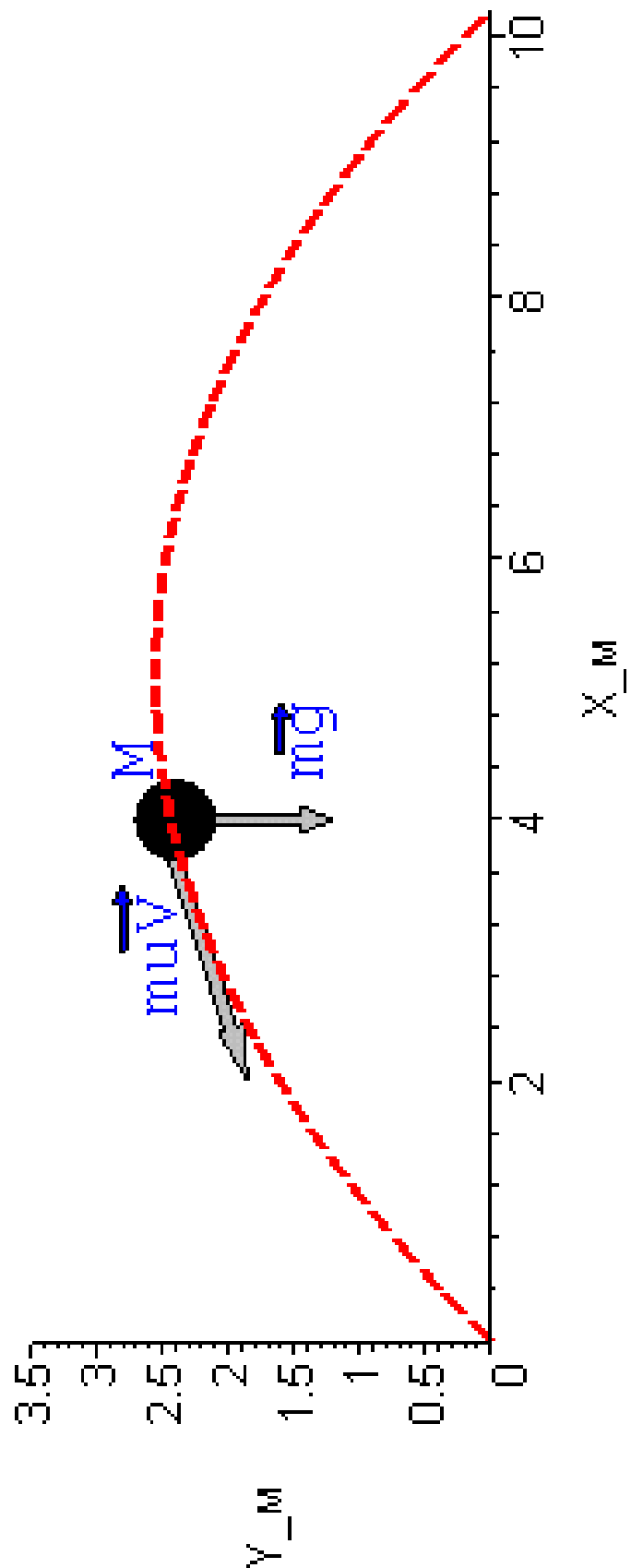


Рис. 8. Расчетная схема (с учетом силы сопротивления, пропорциональной скорости)

```

# Дифференциальные уравнение движения точки:
dsolve([m*diff(x(t),t$2)=-mu*diff(x(t),t),x(0)=0,D(x)(0)=V[0]*cos(alpha)],x(t)):normal(%);
dsolve([m*diff(y(t),t$2)=-m*g-
mu*diff(y(t),t),y(0)=0,D(y)(0)=V[0]*sin(alpha)],y(t)):normal(%);
# Присвоим eq1 и eq2 соответственно значения x(t), y(t):
eq1:=x=-V[0]*cos(alpha)*m*(-1+exp(-mu/m*t))/mu;
eq2:=y=-m*(exp(-mu/m*t)*m*g+exp(-mu/m*t)*V[0]*sin(alpha)*mu+g*t*mu-m*g-
V[0]*sin(alpha)*mu)/mu^2;
# Траектория точки. Исключив из уравнений движения точки параметр t (время),
получим уравнение траектории точки:
simplify(subs(isolate(eq1,t),eq2)):expand(%);
V[0]:=10;alpha:=Pi/4;g:=9.8;m:=0.5;mu:=0.1;
eval(y);
# Дальность полета.
solve(1/V[0]/cos(alpha)/mu*m*g*x+1/cos(alpha)*sin(alpha)*x+
+1/mu^2*g*ln((-x*mu+V[0]*cos(alpha)*m)/V[0]/cos(alpha)/m)*m^2=0,x);
# Скорость и ее проекции на координатные оси:
dsolve([m*diff(Vx(t),t)=-
mu*Vx(t)*cos(alpha),Vx(0)=V[0]*cos(alpha)],Vx(t));
dsolve([m*diff(Vy(t),t)=-m*g-mu*Vy(t)*sin(alpha),Vy(0)=V[0]*sin(alpha)],Vy(t));
v:=sqrt(Vx^2+Vy^2);
# Ускорение и его проекции на координатные оси:
Ax:=solve(m*Ax=-mu*V[0]*cos(alpha)*exp(-mu*cos(alpha)/m*t)*cos(alpha),Ax);
Ay:=solve(m*Ay=-m*g-mu*(-g/mu/sin(alpha)*m+exp(-
mu*sin(alpha)/m*t)*(m*g+V[0]*sin(alpha)^2*mu)/mu/sin(alpha))*sin(alpha),
Ay);
A:=simplify(sqrt(Ax^2+Ay^2),assume=positive);

```

Рис. 9. Листинг программы «Динамика точки с учетом сил сопротивления»

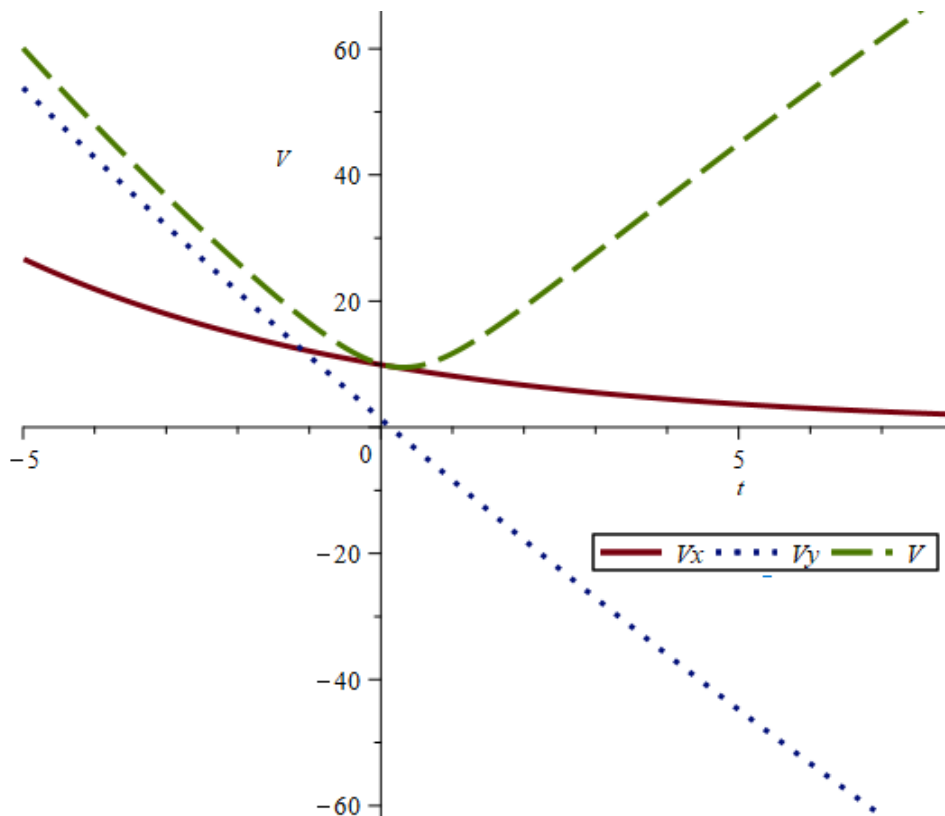


Рис. 10. Графическая зависимость скорости и ее проекций на координатные оси от времени

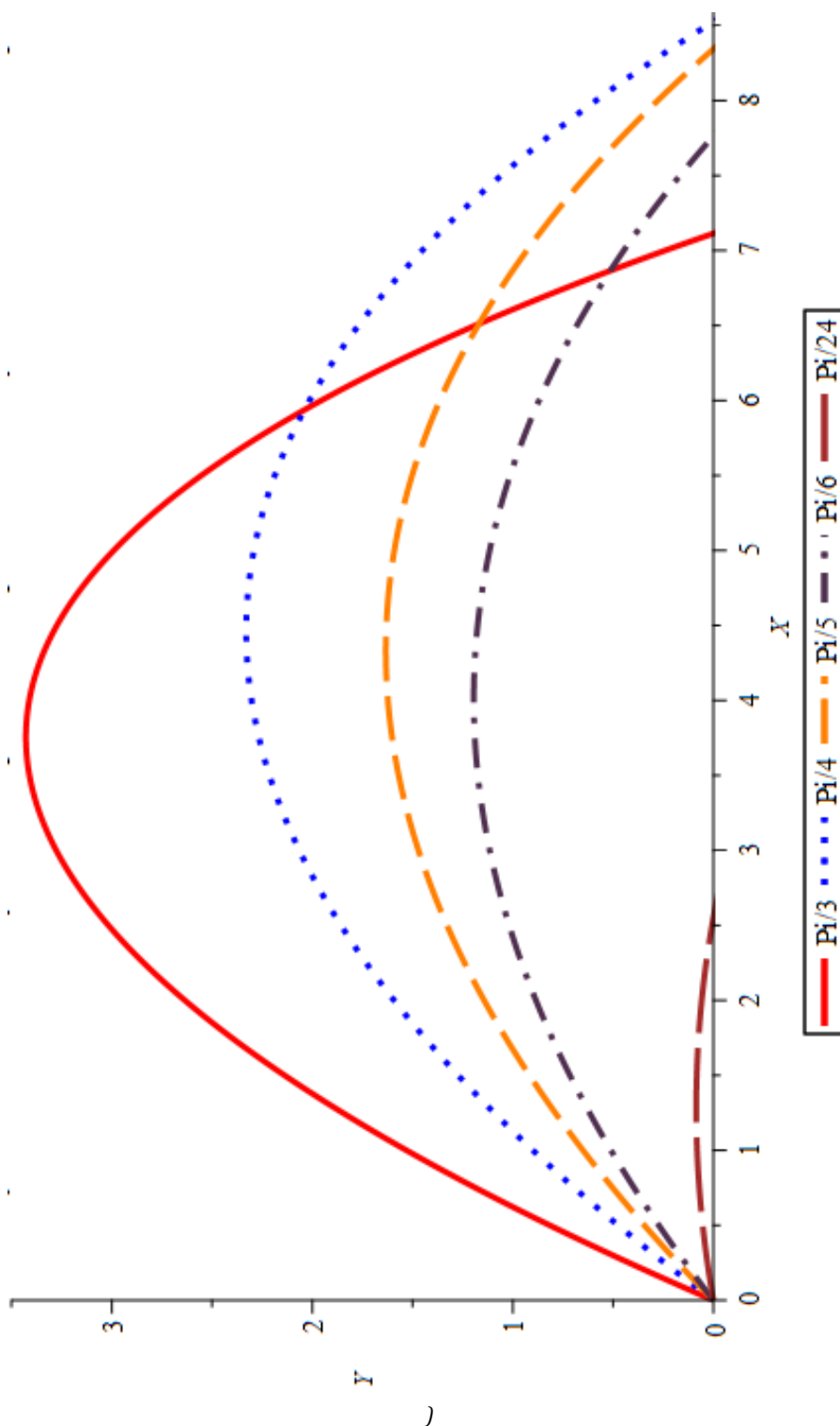


Рис. 11. Влияние угла бросания на высоту подъема и дальность полета точки (с учетом силы сопротивления)

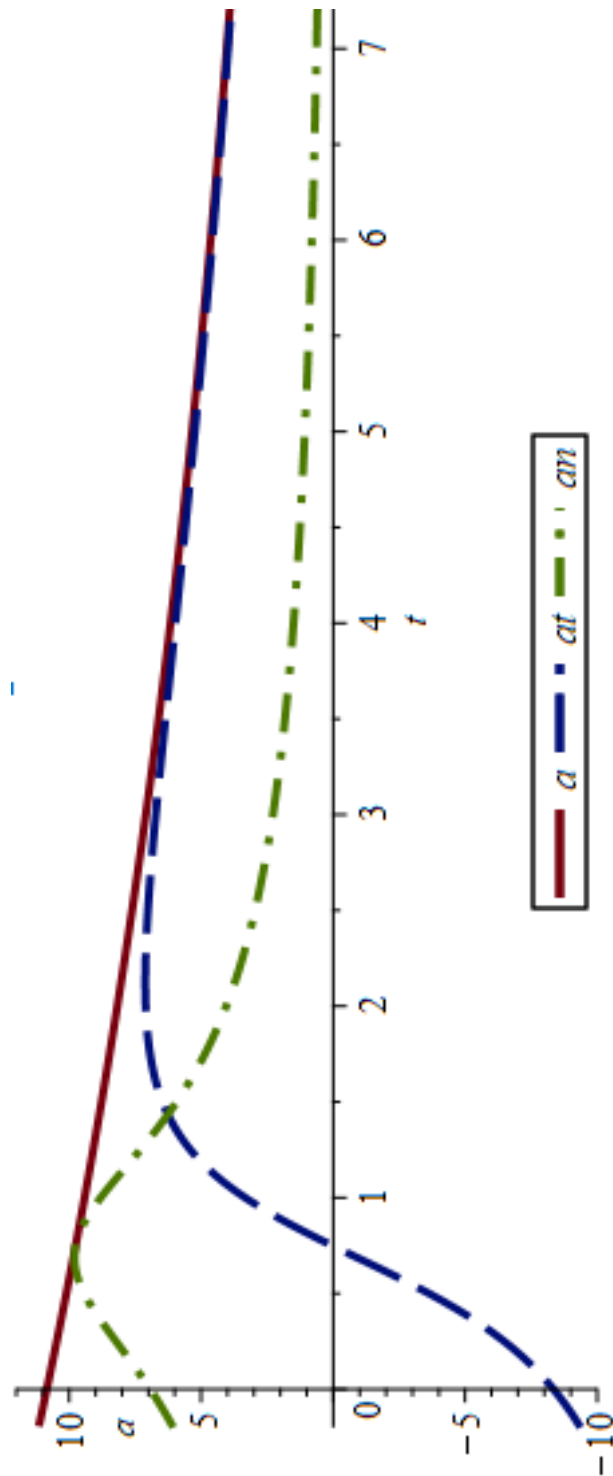


Рис. 12. Зависимость ускорения и его проекций на естественные оси от времени

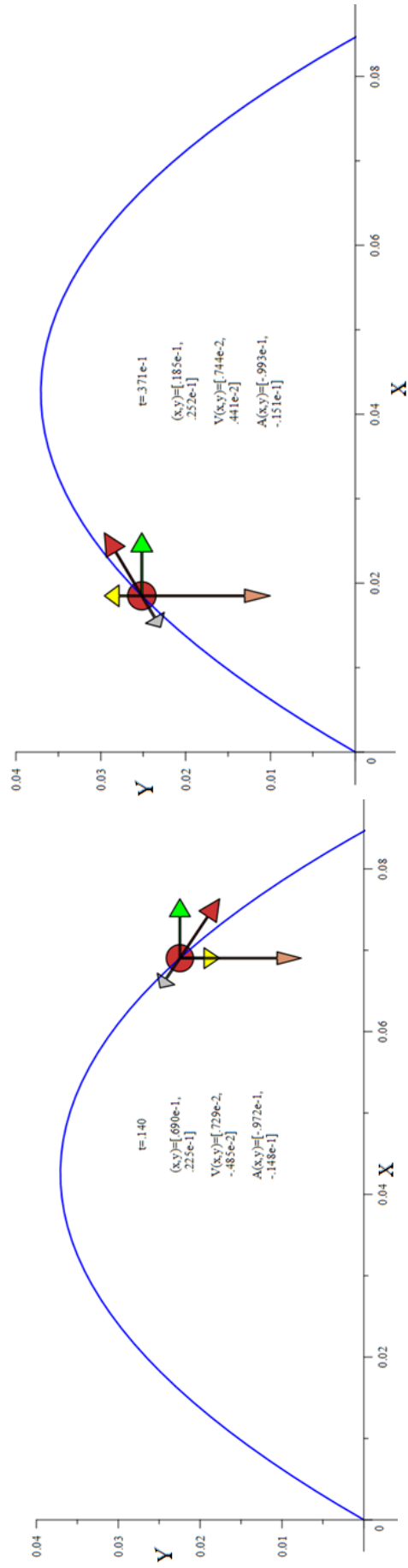


Рис. 13. Кадры 2D-анимации

Выявлено, что учет сил сопротивления при расчетах позволяет более точно предсказывать траекторию полета объекта и оптимизировать его динамику (рис. 14–16). Сопротивление

среды при движении весомой точки значительно изменяет динамику движения (табл.); при учете сопротивления воздуха горизонтальная дальность полета уменьшается на 16,445 %.

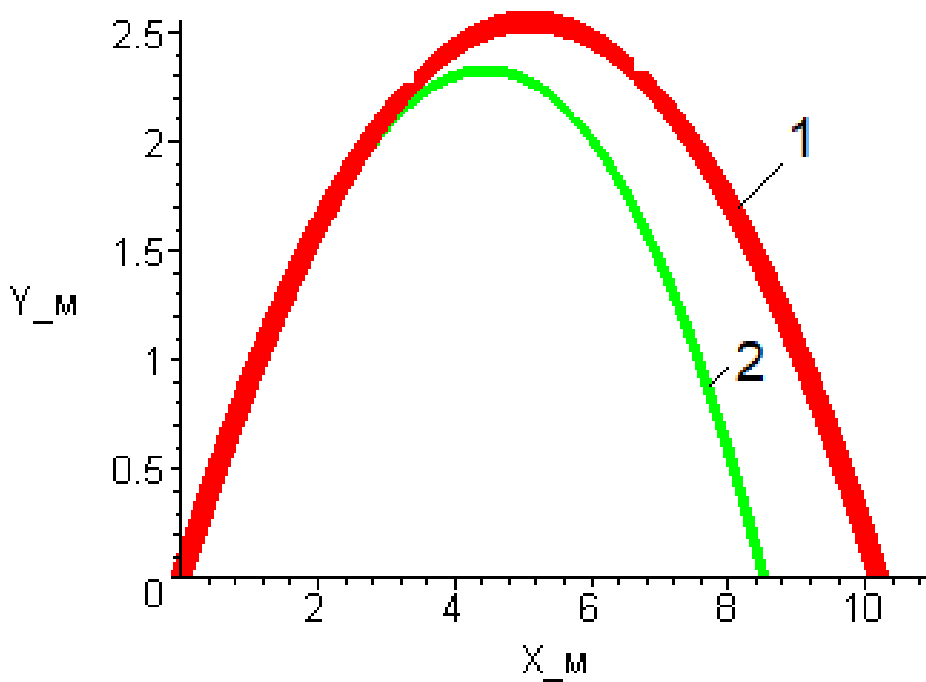


Рис. 14. Траектория движения:  
1 – без учета сил сопротивления, 2 – с учетом сил сопротивления

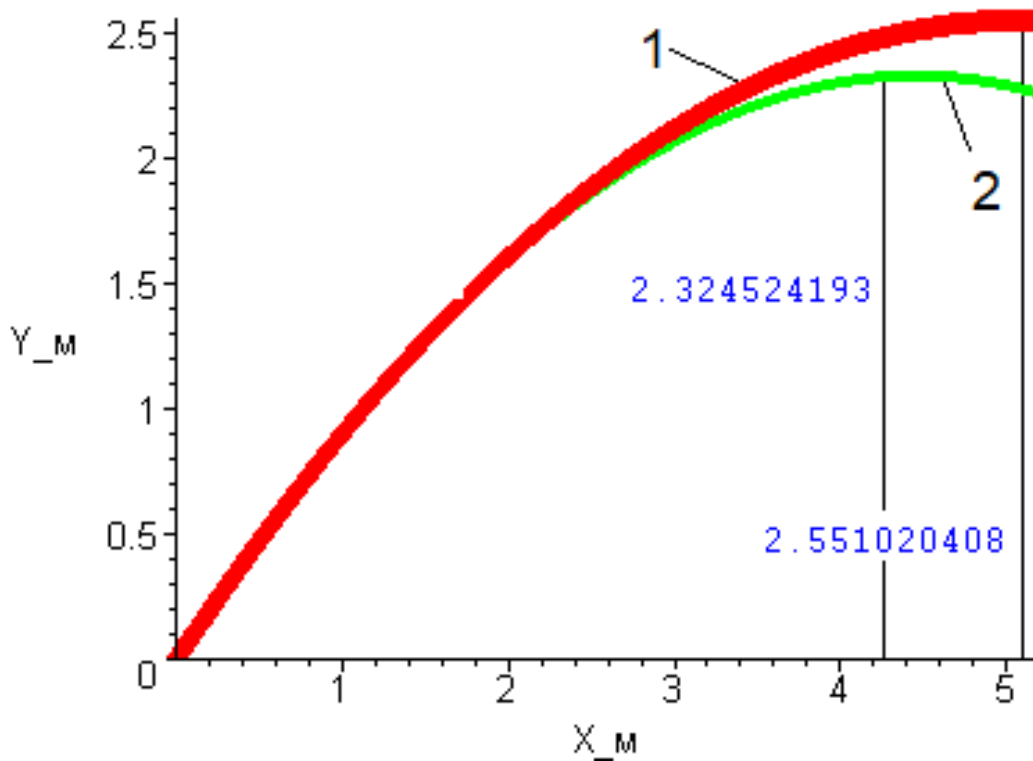


Рис. 15. Высота подъема:  
1 – без учета сил сопротивления, 2 – с учетом сил сопротивления



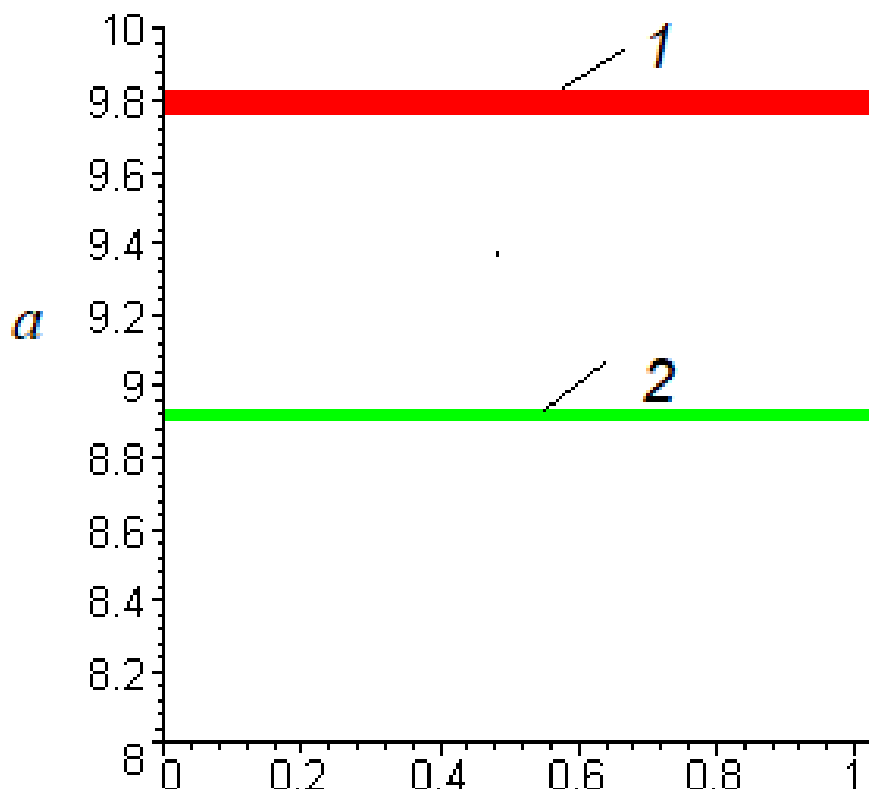


Рис. 16. Ускорение:  
1 – без учета сил сопротивления, 2 – с учетом сил сопротивления

Помимо горизонтальной характеристики, сопротивление также оказывает влияние и на высоту подъема точки. При полете без сопротивления воздуха точка пролетает расстояние, равное дальности полета, за время  $t = 1,443$  сек., а с учетом сопротивления точка находится в воздухе в

течение времени  $t = 1,379$  сек. Таким образом, актуальность решения задачи динамики точки с учетом сил сопротивления состоит в возможности более точного моделирования и прогнозирования движения объектов в реальных условиях, что важно для различных прикладных областей.

Таблица

**Сравнительный анализ результатов**

Анализируемый параметр	Без учета силы сопротивления	С учетом силы сопротивления $F_{сопр} = \mu v$
Дифференциальные уравнения движения	$m\ddot{x} = 0$ $m\ddot{y} = -mg$	$m\ddot{x} = -\mu\dot{x}$ $m\ddot{y} = -mg - \mu\dot{y}$
Начальные условия движения	$x(0) = 0, y(0) = 0$ $V_{0x} = V_0 \cos \alpha, V_{0y} = V_0 \sin \alpha$	$x(0) = 0, y(0) = 0$ $V_{0x} = V_0 \cos \alpha, V_{0y} = V_0 \sin \alpha$
Закон движения точки, м	$x(t) = V_0 \cos \alpha t$ $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 \sin \alpha t$	$x(t) = -\frac{V_0 m \cos \alpha}{\mu} \left( e^{\left(\frac{-\mu t}{m}\right)} - 1 \right)$ $y(t) = -\frac{m}{\mu^2} \left( \mu V_0 \sin \alpha \cdot e^{\left(\frac{-\mu t}{m}\right)} - V_0 \mu \sin \alpha + e^{\left(\frac{-\mu t}{m}\right)} mg + \mu g t - mg \right)$
Уравнение траектории точки, $y = f(x)$	$y = -\frac{1}{2} \frac{gx^2}{V_0^2 \cos^2 \alpha} + \frac{\sin \alpha \cdot x}{\cos \alpha}$	$y(t) = g \ln \left( \frac{m \cos \alpha V_0 - x \mu}{(m V_0 \cos \alpha)} \right) \frac{m^2}{\mu^2} + \frac{\sin \alpha x}{\cos \alpha} + \frac{g m x}{(V_0 \mu \cos \alpha)}$
Дальность полета, м	10,204	8,526
Время полета, сек	1,443	1,379

Далее изучим влияние сил сопротивления как степенных функций скорости на параметры движения брошенного под углом к горизонту тела. Силу сопротивления зададим как функцию  $F_{сопр} = \mu v^n$ , где  $n = 2, 3 \dots k$ . Рассмотрим случай, ко-

гда показатель степени  $n = 2$ . Дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на координатные оси примут вид:

$$m\ddot{x} = -\mu\dot{x}^2, m\ddot{y} = -mg - \mu\dot{y}^2.$$

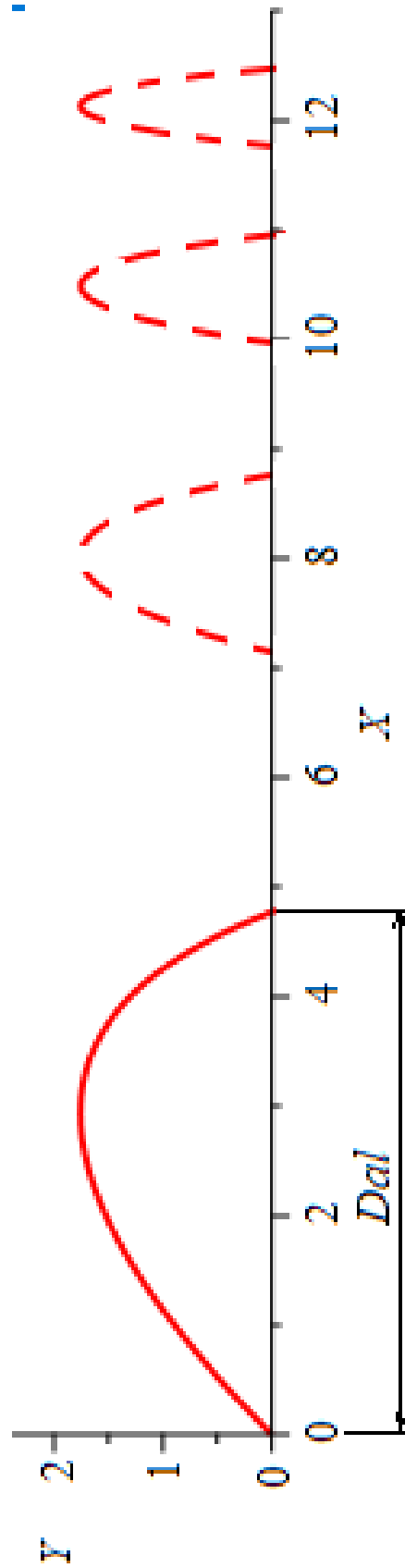


Рис. 17. Траектория движения точки с учетом силы сопротивления ( $n = 2$ )

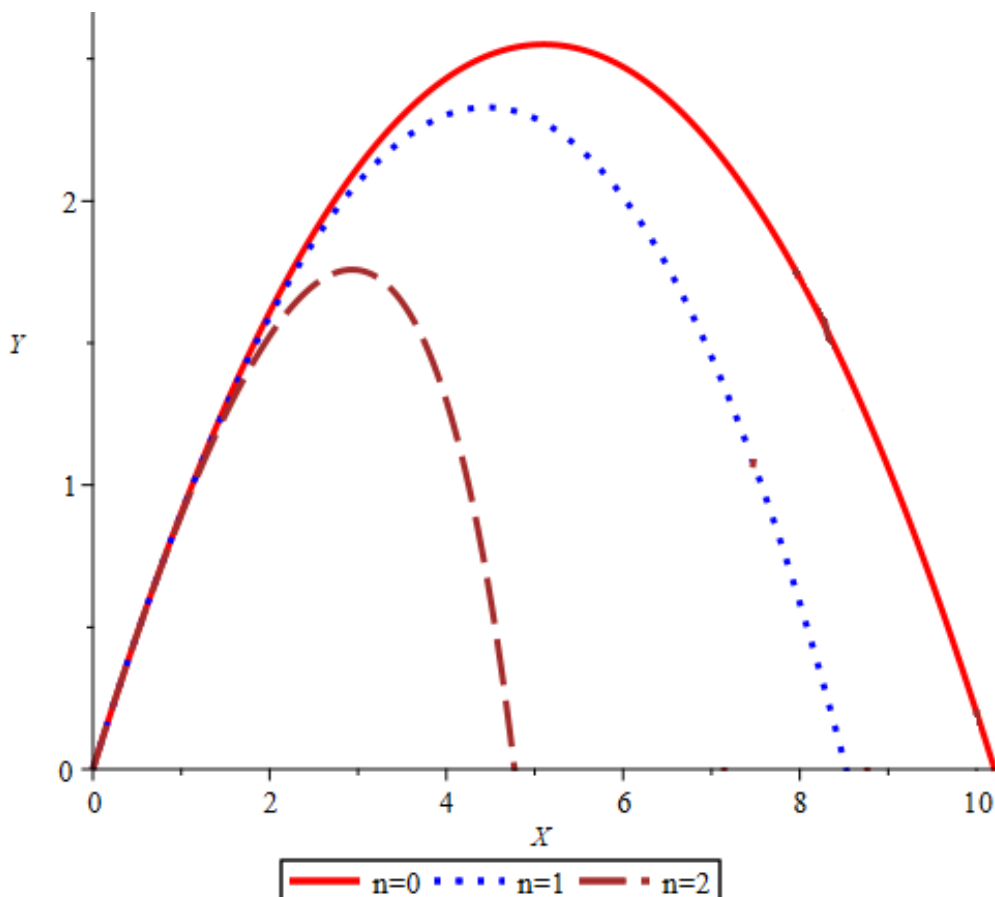


Рис. 18. Траектории движения точки при различных случаях нагружения

Приняв начальные условия движения  $\{x(0) = 0, V_{0x} = V_0 \cos \alpha, y(0) = 0, V_{0y} = V_0 \sin \alpha\}$ , двойным интегрированием дифференциальных уравнений движения точки получим закон движения в виде функций  $x = f(t), y = f(t)$ :

$$x(t) = \frac{m}{\mu} \ln \left( \frac{V_0 \mu \cos \alpha t + m}{m} \right),$$

$$y(t) = \frac{m}{2\mu} \ln \left( \frac{\left( \sqrt{\mu} V_0 \sin \alpha \sin \left( \frac{\sqrt{\mu g t}}{\sqrt{m}} \right) + \sqrt{g m} \cos \left( \frac{\sqrt{\mu g t}}{\sqrt{m}} \right) \right)^2}{m g} \right).$$

Исключаем из полученных уравнений параметр (время  $t$ ) и записываем уравнение траектории точки как функцию  $y = f(x)$ :

$$y = \frac{m}{2\mu} \ln \left( \frac{\left( \left( \frac{\sqrt{\mu} V_0 \sin \alpha \sin \left( \frac{\sqrt{m g} \left( e^{\frac{\mu x}{m}} - 1 \right)}{\sqrt{\mu} \cos \alpha V_0} \right) + \sqrt{g m} \cos \left( \frac{\sqrt{m g} \left( e^{\frac{\mu x}{m}} - 1 \right)}{\sqrt{\mu} \cos \alpha V_0} \right) \right)^2}{m g} \right)}{m g} \right). \quad (1)$$

Дальность ( $Dal$ ) полета рассчитана при условии, что в конечный момент времени (в момент падения точки на землю) координаты приобретают значения:  $y = 0, x = Dal$ , то есть

$$y(Dal) = \frac{m}{2\mu} \ln \left( \frac{\left( \left( \frac{\sqrt{\mu} V_0 \sin \alpha \sin \left( \frac{\sqrt{m g} \left( e^{\frac{\mu Dal}{m}} - 1 \right)}{\sqrt{\mu} \cos \alpha V_0} \right) + \sqrt{g m} \cos \left( \frac{\sqrt{m g} \left( e^{\frac{\mu Dal}{m}} - 1 \right)}{\sqrt{\mu} \cos \alpha V_0} \right) \right)^2}{m g} \right)}{m g} \right) = 0.$$

С учетом принятых ранее исходных данных получаем следующие корни уравнения:

$$\left[ 7.143760461, 4.771683856, -3.087688999 \cdot 10^{-10}, -2.753551297 \right]$$

Построим кривую  $y = f(x)$  (рис. 17), описываемую уравнением (1). При этом траекторией движения точки будет выделенная сплошной линией

часть этой кривой. Тогда из всех найденных корней уравнения для определения дальности подходит второй корень, то есть  $Dal = 4.771683856$  м.

Дальность и время полета точки можно также рассчитать, решив совместно систему уравнений:

$$x(t) = \frac{m}{\mu} \ln \left( \frac{V_0 \mu \cos \alpha t + m}{m} \right),$$

$$y(t) = \frac{m}{2\mu} \ln \left( \frac{\left( \sqrt{\mu} V_0 \sin \alpha \sin \left( \frac{\sqrt{\mu g t}}{\sqrt{m}} \right) + \sqrt{g m} \cos \left( \frac{\sqrt{\mu g t}}{\sqrt{m}} \right) \right)^2}{mg} \right),$$

подставив конечные условия  $x = Dal, y = 0$ . Получены результаты: время полета  $T = 1,129212506$  сек., дальность полета  $Dal = 4,771683856$  м. Построим траектории движения точки для различных случаев: без учета силы сопротивления, с

### Заключение

Задача о полете тела, брошенного под углом к горизонту, является актуальной и в настоящее время. Если ученых древности интересовали простейшие и очевидные, по мнению наших современников, вопросы о причинах и форме траектории движения брошенного тела, то в дальнейшем на первый план вышли теоретические и практические проблемы внешней баллистики. Значительный вклад в их решение внесли такие ученые, как Л. Эйлер, Н. В. Маиевский, Н. Е. Жуковский, С. А. Чаплыгин, А. Н. Крылов, Я. М. Шапиро и др.

Во второй половине XIX века в связи с появлением нарезного оружия особую актуальность приобрела задача обеспечения устойчивости снарядов. Первые результаты в теории устойчивости движения снарядов были получены Н. В. Маиевским, дальнейшее развитие теория получила в трудах А. Н. Крылова, Б. Н. Окунева, Д. А. Вентцеля, Я. М. Шапиро и др. Впервые шесть дифференциальных уравнений, описывающих пространственное движение снаряда как твердого тела, составлены и совместно решены академиком В. С. Пугачевым [9].

Современным вопросам разработки математических моделей и численных методов для решения задач внешней баллистики посвящены исследования ученых Московского государственного технического университета имени Н.

учетом сил сопротивления, зависящих от степенных функций скорости (рис. 18).

При дальнейшем росте показателя степени  $n \geq 3$  в функции  $F_{сопр} = \mu v^n$  аналитическое решение системы дифференциальных уравнений  $m\ddot{x} = -\mu x^n, m\ddot{y} = -mg - \mu y^n$  движения точки значительно затрудняется, а иногда становится невозможным. Численное же решение связано с необходимостью уменьшения шага интегрирования с ростом показателя степени  $n$ , что приводит к существенным вычислительным трудностям, накоплению погрешности и накладывает ограничения на точность получаемых результатов.

Э. Баумана, Балтийского государственного технического университета имени Д. Ф. Устинова, Томского государственного университета и др. В большинстве из них до сих пор используются упрощенные математические модели движения, в которых снаряд представлен в виде материальной точки. Переход к более сложным моделям, описывающим пространственное движение твердого тела с учетом аэродинамики обтекания внешней средой, в полной мере не производился [9].

Современный этап развития подходов к решению задач внешней баллистики опирается на методы математического и компьютерного моделирования. При этом используются модели пространственного движения с учетом аэродинамики обтекания бросаемых тел. Для решения задач этого класса успешно применяется программное обеспечение [10–12] и визуальные технологии 3D-компьютерного моделирования на основе современных САПР-систем [13–15]. Использование данных технологий позволяет повысить наглядность и информативность исследований при изучении быстропротекающих и труднорегистрируемых процессов. В связи с этим разработка комплексной математической модели внешней баллистики артиллерийского выстрела и применение технологии визуального компьютерного моделирования составляют в настоящее время актуальную теоретическую и практическую задачу.

### Список литературы

1. Невенчанная Т. О. Электронный интернет-учебник по теоретической механике : свидетельство об официальной регистрации № 2004612620 / Т. О. Невенчанная, В. Е. Павловский, Е. В. Пономарева. – Зарегистр. в реестре программ для ЭВМ 3.12.2004.
2. Пономарева Е. В. Использование компьютерных программ для обучения кинематике студентов строительных вузов / Е. В. Пономарева, О. А. Хохлова, А. В. Хохлов // Социально-гуманитарный вестник Прикаспия. – 2014. – № 1 (1). – С. 91–97.
3. Ponomareva E. V. Concept, structure and program realization of the Internet textbook on classical mechanics / E. V. Ponomareva, T. O. Nevenchannaya, V. E. Pavlovsky // IFTOMM 2007. – Vol. 2. – P. 38–43.
4. Ponomareva E. V. Development of theoretical and methodological approaches in the study of theoretical mechanics by students of civil engineering / E. V. Ponomareva, A. V. Sinelshchikov, O. A. Khokhlova, K. V. Kulemina // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. – 2022. – № 4 (42). – С. 46–54.



5. Пономарева Е. В. Программа для расчета основных кинематических параметров движения материальной точки : свидетельство об официальной регистрации № 2010614882 / Е. В. Пономарева, О. А. Хохлова, А. В. Хохлов. – Зарегистр. в реестре программ для ЭВМ 27.07.2010.
6. Синельщиков А. В. Программа для расчета реакций в опорах пространственной конструкции : свидетельство об официальной регистрации № 2015663575 / А. В. Синельщиков, Е. В. Пономарева, О. А. Хохлова, А. В. Хохлов. – Зарегистр. в реестре программ для ЭВМ 24.12.2015.
7. Синельщиков А. В. Программа для расчета динамических параметров в задаче Галилея : свидетельство об официальной регистрации № 2023689208 / А. В. Синельщиков, Е. В. Пономарева, Е. Д. Пономарева. – Зарегистр. в реестре программ для ЭВМ 26.12.2023.
8. Синельщиков А. В. Программа для расчета динамики материальной точки с учетом сил сопротивления : свидетельство об официальной регистрации № 2023687503 / А. В. Синельщиков, Е. В. Пономарева, Е. Д. Пономарева. – Зарегистр. в реестре программ для ЭВМ 14.12.2023.
9. Королев С. А. Развитие подходов к решению проблем аэродинамики и устойчивости движения снарядов и неуправляемых ракет на основе математического моделирования : автореф. дисс. ... д-ра техн. наук / С. А. Королев. – Ижевск : Ижевский государственный технический университет имени М. Т. Калашникова, 2020. – 282 с.
10. Ballistic Explorer // Oehler Research, Inc. – Режим доступа: <https://oehler-research.com/ballistics-explorer>, свободный. – Заглавие с экрана. – Яз. рус.
11. Digitize & Analyze Your Targets // Recreational Software, Inc. – Режим доступа: <https://www.shooting-software.com/target.htm>, свободный. – Заглавие с экрана. – Яз. рус.
12. PRODAS V3 – Software Tools for the Ballistics Professional // Arrow Tech. – Режим доступа: <http://www.prodas.com>, свободный. – Заглавие с экрана. – Яз. рус.
13. Программное обеспечение САПР AutoCAD // Autodesk Inc. – Режим доступа: <https://www.autodesk.ru/products/autocad>, свободный. – Заглавие с экрана. – Яз. рус.
14. Система трехмерного моделирования КОМПАС-3D // АСКОН. – Режим доступа: <https://ascon.ru/products>, свободный. – Заглавие с экрана. – Яз. рус.
15. ПК ЛИРА 10. Многофункциональная система проектирования и расчета // ЛИРА софт. – Режим доступа: <https://lira-soft.com/lira-10>, свободный. – Заглавие с экрана. – Яз. рус.

© А. В. Синельщиков, Е. В. Пономарева, Е. Д. Пономарева

**Ссылка для цитирования:**

Синельщиков А. В., Пономарева Е. В., Пономарева Е. Д. Решение задачи Галилея с учетом сил сопротивления в среде Maple // Инженерно-строительный вестник Прикаспия : научно-технический журнал / Астраханский государственный архитектурно-строительный университет. Астрахань : ГБОУ АО ВО «АГАСУ», 2024. № 3 (49). С. 92–112.