ресурсов : сборник научных трудов 6-й Международной научно-технической интернет-конференции / под общ. ред. И. А. Басовой. – Тула : Тульский государственный университет, 2021. – С. 203–207.
14. Карпасюк И. В. Формализация процедуры выявления личностных характеристик потенциальной жертвы кибермошенничества / И. В. Карпасюк, А. И. Карпасюк, Н. В. Давидюк, Е. В. Чертина // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. – 2024. – № 2. – С. 77–84.
15. Космачева И. М. Система событийного мониторинга для автоматизированного обнаружения инцидентов / И. М. Космачева, И. Ю. Кучин, Н. В. Давидюк, М. Ф. Руденко, В. И. Лобейко, И. В. Сибикина // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. – 2023. – № 3. – С. 76–86.
16. Леоненков А. В. Нечеткое моделирование в среде MATLAB и fuzzyTECH / А. В. Леоненков. – Санкт-Петербург : БХВ–Петербург, 2005. – 736 с.
17. Баранова Е. К. Методика анализа рисков информационной безопасности с использованием нечеткой логики на базе инструментария MATLAB / Е. К. Баранова, А. М. Гусев // Образовательные ресурсы и технологии. – 2016. – № 1 (13). – С. 88–96.
18. Банк данных угроз безопасности информации. – Режим доступа: https://bdu.fstec.ru/threat-section, свободный. – Заглавие с экрана. – Яз. рус.
19. Титов В. А. Защита информации в государственной информационной системе жилищно-коммунального хозяйства / В. А. Титов, О. А. Замараева, Д. О. Кузин // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2014. – № 5-2. – С. 197.
20. Евдошенко О. И. Применение методов машинного обучения для детектирования вредоносных URL / О. И. Евдошенко, Ю. А. Лежнина //Инженерно-строительный вестник Прикаспия. – 2023. – № 2 (44). – С. 122–127.

Ссылка для цитирования:
Космачева И. М., Давидюк Н. В., Сибикина И. В. Алгоритм безопасной обработки данных в процессе электронного голосования собственниками многоквартирных домов // Инженерно-строительный вестник Прикаспия : научно-технический журнал / Астраханский государственный архитектурно-строительный университет. Астрахань : ГБОУ АО ВО «АГАСУ», 2024. № 4 (50). С. 116–122.

УДК 519.65
DOI 10.52684/2312-3702-2024-50-4-122-126

КОМПЛЕКСНЫЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МНОГОЧЛЕН ЛАГРАНЖА

К. Д. Яксубаев, И. В. Аксютина

Яксубаев Камиль Джекишович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры систем автоматизированного проектирования и моделирования, Астраханский государственный архитектурно-строительный университет, г. Астрахань, Российская Федерация, тел. : + 7 (961) 054-22-86; e-mail: yak-mail@yandex.ru;

Аксютина Ирина Владимировна, кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики – 3, МИРЭА – Российский технологический университет, г. Москва, Российская Федерация, тел. : + 7 (905) 362-62-81; e-mail: aksyutina@mail.ru

В статье построены две формы комплексного параметрического многочлена Лагранжа. Обнаружено явление сильной вычислительной устойчивости. Алгоритм работает независимо от количества точек. Испытания формул проводились до трехсот интерполяционных точек. Для испытаний с большим количеством интерполяционных точек нужен более мощный компьютер. Обнаружено, что комплексные параметрические многочлены Лагранжа не осциллируют или осциллируют медленно. Этот факт открывает возможности практического применения построенного комплексного многочлена Лагранжа в теории интерполяции или иных разделах прикладной математики. Графики построенных интерполяционных кривых не являются графиками функций. Остался неизученным вопрос: можно ли с помощью комплексного параметрического многочлена Лагранжа построить не кривую, а функцию?

Ключевые слова: *интерполяция, комплексный параметрический многочлен, многочлен Лагранжа, Mathcad.*

COMPLEX INTERPOLATION LAGRANGE POLYNOMIAL

K. D. Yaksubaev, I. V. Aksyutina

Yaksubaev Kamil Dzhekishovich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Computer-aided Design and Modeling Department, Astrakhan State University of Architecture and Civil Engineering, Astrakhan, Russian Federation, phone : + 7 (961) 054-22-86; e-mail : yak-mail@yandex.ru;

Aksyutina Irina Vladimirovna, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of High Mathematics – 3 Department, MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russian Federation, phone : + 7 (961) 054-22-86; e-mail : aksyutina@mail.ru

Two forms of the complex parametric Lagrange polynomial are constructed in the article. The phenomenon of strong computational stability has been discovered. The algorithm works regardless of the number of points. The formulas were tested up to three hundred interpolation points. For tests with a large number of interpolation points, a more powerful computer is needed. It is found that complex parametric Lagrange polynomials do not oscillate, or oscillate slowly. And this fact opens up the possibility of practical application of the constructed complex Lagrange polynomial in the theory of interpolation or in other sections of applied mathematics. The graphs of the constructed interpolation curves are not graphs of functions. The question remains unexplored: Is it possible to construct a function rather than a curve using a complex parametric Lagrange polynomial?

Keywords: *interpolation, complex parametric polynomial, Lagrange polynomial, Mathcad.*

Введение

Интерполяционный многочлен Лагранжа исторически был первым методом интерполяции исходных данных, но для практической интерполяции его можно использовать только при маленьком числе интерполяционных точек, не более 10. А если число интерполяционных точек превышает 10, то возникает такое неприятное явление, как осцилляция.

Под осцилляцией мы понимаем многократное превышение размаха построенного интерполяционного графика над размахом экспериментальных интерполяционных точек по оси ординат.

При числе точек 15–20 и выше интерполяционный многочлен Лагранжа выдает нереально большие числа, поэтому в современную эпоху он не используется для реальной практической интерполяции.

Настоящая работа – это попытка вдохнуть вторую практическую жизнь в интерполяционный многочлен Лагранжа. Для выполнения этой задачи нужно было обнаружить у него новые, неизвестные свойства.

Известно, что интерполяционный многочлен Лагранжа сильно осциллирует именно на концах отрезка интерполяции. Впервые это неприятное явление обнаружил физик К. Рунге в 1901 году.

К. Рунге на отрезке $[-1;1]$ построил интерполяционный многочлен Лагранжа 12-й степени для функции:

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}.$$

На графике он увидел, что значения интерполяционного многочлена Лагранжа многократно превышают амплитуды исходных интерполяционных точек. Причем явление осцилляции сохраняется даже в том случае, если абсциссы интерполяционных точек взяты с равным шагом.

Именно после работ К. Рунге стало ясно, что классический многочлен Лагранжа можно использовать для интерполяции только при небольшом количестве интерполяционных точек. В основном интерполяционный многочлен Лагранжа используется сегодня внутри теорем для теоретических исследований.

Математики, борясь за интерполяционный многочлен Лагранжа, доказали, что если за точки интерполяции принимаются корни чебышевских многочленов, то осцилляция отсутствует. Появилась возможность использования многочлена Лагранжа при большом количестве интерполяционных точек. Однако имеется ограничение: абсциссы интерполяционных точек нельзя выбирать произвольным образом.

Рассматриваемая статья написана в рамках продолжающейся борьбы за эту математическую функцию. Авторами выяснено, что комплексный параметрический многочлен Лагранжа обладает феноменальной вычислительной устойчивостью. Он функционирует без сильной осцилляции при любом количестве интерполяционных точек.

Метод

При выполнении работы использовался комплексный анализ и свойства комплексных кривых. Операторы математического пакета Mathcad позволили получить искомые формулы в компактной форме.

В настоящей статье мы построим два комплексных интерполяционных многочлена. Выделив их действительные части, построим параметрический интерполяционный многочлен Лагранжа [1–10].

Само построение будем проводить в популярном математическом пакете Mathcad. Зададим число интерполяционных точек $N = 20$. Выберем на единичном круге N равномерно распределенных точек, задав их с помощью углов. Имеем:

$$\left| \begin{array}{l} j := 0..N-1 \\ \varphi_j := \frac{2\pi j}{N} \end{array} \right. .$$

Зададим N случайных точек по оси иксов и игреков:

$$\left| \begin{array}{l} x1 := runif(N,-5{,}5) \\ x := sort(x1) \\ y := runif(N,-10{,}10) \end{array} \right. .$$

Точки, распложенные по оси иксов, отсортируем в порядке возрастания. Построим два комплексных интерполяционных многочлена:

$$\left| \begin{array}{l} Fx(\psi) := \sum_{k=0}^{N-1} \left(x_k \prod_{j=0}^{N-1} if\left(j = k, 1, \frac{e^{i\psi} - e^{i\varphi_j}}{e^{i\varphi_k} - e^{i\varphi_j}} \right) \right) \\ Fy(\psi) := \sum_{k=0}^{N-1} \left(y_k \prod_{j=0}^{N-1} if\left(j = k, 1, \frac{e^{i\psi} - e^{i\varphi_j}}{e^{i\varphi_k} - e^{i\varphi_j}} \right) \right) \end{array} \right. .$$

Результаты и обсуждение

Выделим действительные части построенных комплексных многочленов Лагранжа и построим из них параметрический многочлен (рис. 1).

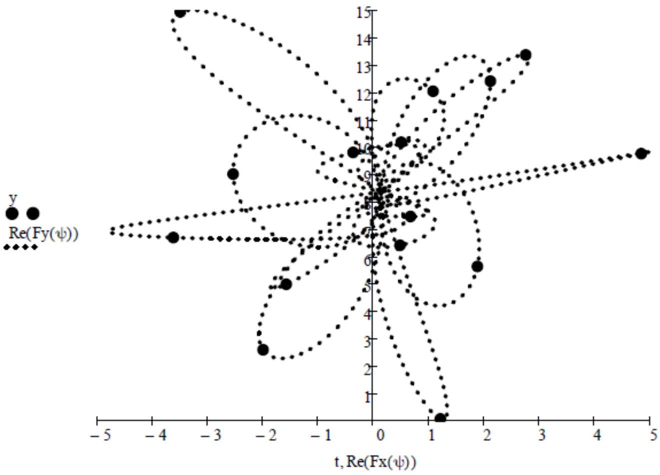

Рис. 1. Параметрический многочлен Лагранжа при N = 20

Отметим положительные и отрицательные свойства построенного параметрического многочлена Лагранжа.

Отрицательные свойства:

1) график построенного параметрического интерполяционного многочлена является не графиком функции, а графиком только кривой;

2) построенный интерполяционный многочлен соединяет соседние по номеру точки достаточно сложной кривой, поэтому неизвестно, каким образом можно использовать построенный параметрический интерполяционный многочлен Лагранжа для практической интерполяции.

Однако имеются и очень важные положительные свойства. Построенный параметрический многочлен вычислительно устойчив при большом количестве точек. Это означает, что при большом количестве интерполяционных точек график многочлена успешно строится и проходит через все интерполяционные точки, не пропуская ни одной.

Мы знаем, что классический интерполяционный многочлен Лагранжа даже средней устойчивостью похвастаться не может. Приведем график параметрического интерполяционного многочлена при числе точек $N = 100$ (рис. 2). Параметры исходных данных таковы:

$$\left| \begin{array}{l} x1 := runif(N, -5{,}100) \\ x := sort(x1) \\ y := runif(N, -5{,}100) \end{array} \right. .$$

График был построен с шагом 0,001.

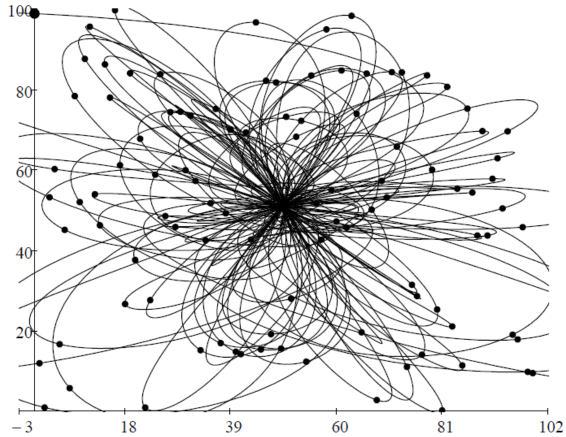

Рис. 2. Параметрический многочлен Лагранжа при $N = 100$ точек

Имеется еще одно потрясающее свойство исследуемого нами интерполяционного многочлена. Он совсем не осциллирует, притом что интерполяционные точки расположены неравномерно.

В теории интерполяции различными видами функций и сплайнов такое невероятное свойство при неравномерном расположении интерполяционных точек практически не встречается [11–20].

Положительные свойства исследуемого интерполяционного многочлена настолько необычны и важны, что остается надеяться, что им будет найдено практическое применение.

Испытания проводились и при 200 точках, и при 300 точках. Комплексный параметрический многочлен Лагранжа во всех случаях проходил через интерполяционные точки. На самом деле алгоритм сработает при любом количестве точек, только нужна соответствующая мощность компьютера для изображения большого количества точек.

Параметрические интерполяционные кривые, в частности параметрические интерполяционные сплайны, широко применяются во всех разделах прикладной математики [11–15], поэтому потребность инженерных дисциплин в новых типах интерполяционных кривых все время будет только возрастать.

Приведем еще одну форму комплексного многочлена Лагранжа, чтобы показать, что возможны и иные комплексные интерполяционные многочлены (рис. 3):

$$F(\psi) := \sum_{k=0}^{N-1}\left((x_k + iy_k)\prod_{j=0}^{N-1} if\left(j = k, 1, \frac{e^{i\psi} - e^{i\varphi_j}}{e^{i\varphi_k} - e^{i\varphi_j}}\right)\right).$$

Интерполяционные точки таковы:

$$\left|\begin{array}{l} N = 30 \\ x1 := runif(N, -30{,}30) \\ x := sort(x1) \\ y := runif(N, 0{,}100) \end{array}\right. .$$

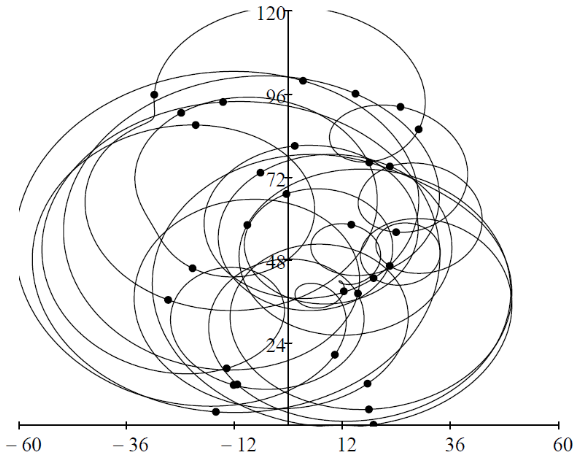

Рис. 3. Комплексный многочлен Лагранжа при N = 30 точек

Можно видеть, что вычислительная устойчивость осталась, но у второй формы комплексного параметрического интерполяционного многочлена Лагранжа антиосцилляционные свойства хуже, чем у первой формы многочлена Лагранжа.

Возникает естественный вопрос: возможно ли с помощью комплексного интерполяционного многочлена построить функцию, а не интерполяционную кривую?

Рассмотрим равномерные экспериментальные данные, то есть случай, когда абсциссы интерполяционных точек расположены равномерно с постоянным шагом (рис. 4). Приведем исходные данные:

$$\left|\begin{array}{l} N = 20 \\ y := runif(N, 0{,}100) \end{array}\right. .$$

Абсциссы интерполяционных равномерно расположенных точек таковы:

$x = (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6\ \ 7\ \ 8\ \ 9\ \ 10\ \ 11\ \ 12\ \ 13\ \ 14\ \ 15).$

Ординаты интерполяционных точек, как всегда, выбираются случайным образом.

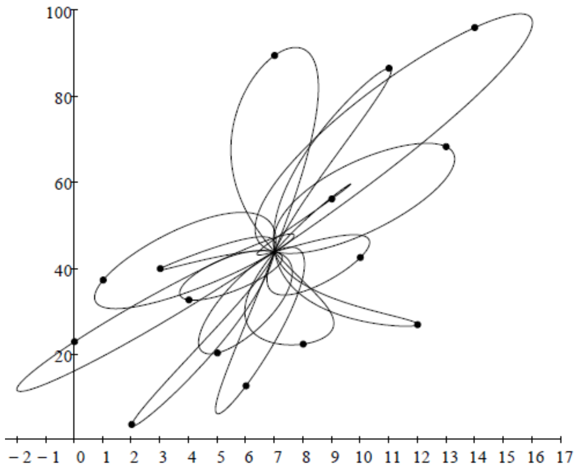

Рис. 4. Интерполяционные точки с постоянным шагом

Можно видеть, что постоянный шаг абсцисс интерполяционных точек нам не помог и графика функции не получилось. Заметим, что построенные интерполяционные кривые на всех приведенных рисунках обходят точки строго по номерам от первого ко второму, от второго к третьему и т. д. Но все дело в том, что движение кривой от первой точки до второй идет не по кратчайшему, а по длинному обходному пути, поэтому по графику трудно определить, выдерживает ли построенная интерполяционная кривая порядок обхода экспериментальных интерполяционных точек.

Для определения порядка обхода пришлось организовать анимацию в пакете Mathcad, которая продемонстрировала, что порядок обхода всегда соблюдается.

Заключение

Работа авторов показала, что с помощью комплексного анализа можно построить новый вид параметрического интерполяционного многочлена Лагранжа с удивительными свойствами: он совсем не осциллирует и вычислительно устойчив. Есть надежда, что эти замечательные качества найдут себе применение на практике. Более того, с помощью комплексного анализа можно строить множество разнообразных параметрических кривых Лагранжа с различными свойствами.

Список литературы

1. Кострикин А. И. Введение в алгебру / А. И. Кострикин. – Москва : МЦНМО, 2018. – 272 с.
2. Хоменко Т. В. Параметрический сплайн, построенный на основе оператора lspline пакета Mathcad / Т. В. Хоменко, К. Д. Яксубаев // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. – 2021. – № 1 (35). – С. 86–88.
3. Яксубаев К. Д. Подавление осцилляции интерполяционного многочлена Лагранжа / К. Д. Яксубаев // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. – 2021. – № 3 (37). – С. 145–151.
4. Яксубаев К. Д. Построение параметрического интерполяционного многочлена Лагранжа / К. Д. Яксубаев // Потенциал интеллектуально одаренной молодежи – развитию науки и образования : материалы XI Международного форума молодых ученых, инноваторов, студентов и школьников. – Астрахань : Астраханский государственный архитектурно-строительный университет, 2022. – С. 98–101.
5. Стечкин С. Б. Сплайны в вычислительной математике / С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин. – Москва : Наука, 1976.
6. Тихомиров В. М. Теория приближений. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 14 (Итоги науки и техники, ВИНИТИ АН СССР) / В. М. Тихомиров. – Москва, 1987.
7. Рябенький В. С. Введение в вычислительную математику / В. С. Рябенький. – Москва. : Физматлит, 2008.
8. Авхадиев Ф. Г. Численные методы анализа / Ф. Г. Авхадиев. – Казань : Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2013.
9. Бабенко К. И. Основы численного анализа / К. И. Бабенко. – Москва : Наука, 1986.
10. Бахвалов Н. С. Численные методы в задачах и упражнениях. Учебное пособие / Н. С. Бахвалов, А. В. Лапин, Е. В. Чижонков ; под ред. В. А. Садовничего. – Москва : Высшая школа, 2000.
11. Хаммад Д. А. Параметрический кубический сплайн для дробных по времени уравнений Бюргерса и связанных с ними уравнений Бюргерса / Д. А. Хаммад, М. С. Семари и А. Г. Хаттаб // Теория неподвижной точки, алгоритмы, наука, инженерия. – 2023. – № 9. – Режим доступа: https://doi.org/10.1186/s13663-023-00740-3, свободный. – Заглавие с экрана. – Яз. англ.
12. Муфтеев В. Г. Моделирование кривых линий высокого качества / В. Г. Муфтеев, А. Р. Марданов // Прикладная геометрия. – 2006. – № 18, вып. 8.
13. Фокс А. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве / А. Фокс, М. Пратт. – Москва : Мир, 1982. – 304 с.
14. Безье П. Математика и САПР / П. Безье. – Москва : Мир, 1980. – 280 с.
15. Лукпанов Ф. Ф. Математическое моделирование сложных поверхностей посредством параметрических кривых и b-сплайнов // Прикладная геометрия и машинная графика в авиастроении / Ф. Ф. Лукпанов, В. Г. Муфтеев. – Москва : Московский авиационный институт, 1981. – С. 30–33.
16. Квасов Б. И. Монотонная и выпуклая интерполяция весовыми кубическими сплайнами / Б. И. Квасов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2013. – Т. 53, № 10. – С. 1610–1621.
17. Znamenskij S. Numerical evaluation of the interpolation accuracy of simple elementary functions / S. Znamenskij // Program Systems: Theory and Applications. – 2018. – Vol. 9, № 4 (39). – P. 69–92.
16. Жирков В. Ф. Полиномиальная интерполяция в цифровой обработке сигналов при высоких требованиях к точности / В. Ф. Жирков, Л. Т. Сушкова, А. И. Королев, К. Н. Большаков, А. А. Обеднин, Г. В. Прокофьев // Журнал радиоэлектроники. – 2017. – № 4. – Режим доступа: http://jre.cplire.ru/jre/apr17/5/text.pdf, свободный. – Заглавие с экрана. – Яз. рус
18. Fornberg B. Stable computations with Gaussian radial basis functions / B. Fornberg, E. Larsson, N. Flyer // SIAM Journal on Scientific Computing. – 2011. – P. 869–892. – DOI: http://dx.doi.org/10.1137/09076756X.
19. Wang B. Decadal-Scale Riverbed Deformation and Sand Budget of the Last 500 Km of the Mississippi River: Insights into Natural and River Engineering Effects on a Large Alluvial River / B. Wang, Y. J. Xu // Journal of Geophysical Research: Earth Surface. – 2018. – № 123 (5). – Pp. 874–890. – DOI: 10.1029/2017JF004542.

Ссылка для цитирования:

Яксубаев К. Д., Аксютина И. В. Комплексный интерполяционный многочлен Лагранжа// Инженерно-строительный вестник Прикаспия : научно-технический журнал / Астраханский государственный архитектурно-строительный университет. Астрахань : ГБОУ АО ВО «АГАСУ», 2024. № 4 (50). С. 122–126.