

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРАМЕТРОВ ВИБРОЗАЩИТЫ

А. Е. Евсеев, И. Н. Гарькин, Э. Ю. Абдуллазянов

Евсеев Александр Евгеньевич, кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика», Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза, Российская Федерация ; e-mail: ae-73@yandex.ru;

Гарькин Игорь Николаевич, кандидат технических наук, заведующий кафедрой «Защита в чрезвычайных ситуациях», Московский государственный университет технологий и управления им. К. Г. Разумовского (Первый казачий университет), г. Москва, Российская Федерация ; e-mail: igor_garkin@mail.ru;

Абдуллазянов Эдвард Юнусович, кандидат технических наук, доцент, ректор, Казанский государственный энергетический университет, Лауреат премии правительства в области науки и техники РФ, г. Казань, Республика Татарстан, Российская Федерация ; e-mail: kgeu@kgeu.ru

Статья посвящена исследованию колебательного движения среды и вопросам защиты строительных конструкций от колебаний. В частности, на основании общих дифференциальных уравнений движения идеально упругого тела разработана и предложена методика расчета оптимальных параметров виброзащитных экранов, расположенных на пути движения волн вибрации, что помогает снизить воздействия на строительные конструкции зданий и сооружений. Полученная методика апробирована авторами при реализации реального строительного проекта. Результаты апробации позволяют говорить о достоверности полученных результатов и эффективности созданной методики.

Ключевые слова: *строительная механика, колебания, деформации, дифференциальные уравнения, вибрация.*

USING DIFFERENTIAL EQUATIONS OF BODY MOTION IN DETERMINING VIBRATION PROTECTION PARAMETERS

A. Ye. Yevseyev, I. N. Garkin, E. Yu. Abdullazyanov

Yevseyev Aleksandr Yevgenyevich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of Mechanics Department, Penza State University of Architecture and Construction, Penza, Russian Federation ; e-mail: ae-73@yandex.ru;

Garkin Igor Nikolayevich, Candidate of Technical Sciences, Head of Protection in Emergency Situations Department, Moscow State University of Technology and Management named after K. G. Razumovsky (First Cossack University), Moscow, Russian Federation ; e-mail: igor_garkin@mail.ru;

Abdullazyanov Edward Yunusovich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Rector, Kazan State Power Engineering University, Laureate of the Government Prize in the Field of Science and Technology of the Russian Federation, Kazan, Republic of Tatarstan, Russian Federation ; e-mail: kgeu@kgeu.ru

The article is devoted to the study of the oscillatory motion of the medium and the issues of protection against oscillations. In particular, based on the general differential equations of motion of an ideally elastic body, a method for calculating the optimal parameters of vibration protection screens located on the path of vibration waves has been developed. The resulting method has been tested in a real project. The results of testing allow us to speak about the reliability of the results obtained and the effectiveness of the created method.

Keywords: *structural mechanics, vibrations, deformations, differential equations.*

Введение

В развитии машиностроения имеет место общая тенденция – повышение рабочих параметров машин, повышение единичной мощности машинных агрегатов. Увеличение рабочих параметров оборудования, снижение его удельной металлоемкости приводит к усилению его виброактивности. Надежность эксплуатации машин неразрывно связана с их виброактивным состоянием, поскольку повышенная вибрация увеличивает динамические нагрузки на конструктивные элементы, интенсифицирует износ и повреждение машин и поддерживающих конструкций, не-

редко отрицательно воздействует на качественные показатели продукции. Общая цель исследований вибрационных процессов оборудования, заключающихся в выявлении основных причинно-следственных зависимостей, направлена на повышение эффективности и безопасности работы этого оборудования. Указанная цель достигается при проектировании, изготовлении и эксплуатации оборудования путем разработки и внедрения методов и средств его виброзащиты.

Под виброзащитой понимается совокупность средств и методов уменьшения вибрации, воспринимаемой защищаемыми объектами.

При этом под уменьшением вибрации понимают снижение значений каких-либо определенных величин, характеризующих вибрацию. Защищаемыми от вибрации объектами в данном случае являются составные части и поддерживающие конструкции рассматриваемых машин и оборудования, а также оборудование, расположенное в непосредственной близости от источников вибрации [1, 2].

Метод

В настоящей работе рассмотрим такой метод виброзащиты как виброизоляция, заключающийся в уменьшении передачи вибрации от источника возбуждения защищаемому объекту при помощи устройств, помещаемых между ними – виброизоляторов. Используются винтовые пружины, рессоры, резиновые и резинометаллические конструкции, полимеры, пневматические, гидропневматические конструкции, металлические конструкции, торсионы, пакеты пластин и т. п. Кроме того, особым видом виброизоляторов можно считать установленные на пути движения волн экраны в виде включений, которые проводят вибрации существенно менее эффективно (элементы с нелинейной жесткостью, воздушные прослойки и т. п.), чем исходные.

Определим параметры воздушной прослойки, которая снизит колебания до приемлемого уровня.

Условно предполагая грунт удовлетворяющим условиям идеального, изотропного и однородного тела, применим общие дифференциальные уравнения движения идеально упругого тела [3, 4]. Эти уравнения имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + Y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + Z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

где u, v, w – составляющие упругого перемещения по координатным осям; Δ – относительное изменение объема, равное:

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z};$$

∇^2 – оператор Лапласа:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

ρ – плотность грунта; X, Y, Z – составляющие массовых сил; λ, μ – коэффициенты Лямэ, связанные с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона σ зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} E \\ \mu &= \frac{\sigma}{2(1+\sigma)} E \end{aligned} \right\}. \quad (2)$$

Влияние массовых сил мало, поэтому ими можно пренебречь.

Если предполагать, что грунт представляет твердую упругую среду, простирающуюся в бес-

конечность в любом направлении [5, 6], то от источника колебаний будут распространяться независимо друг от друга два рода волн. Смещение в любой точке грунта можно представить в виде суммы смещений, вызванных каждой волной в отдельности, то есть

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2, \\ v &= v_1 + v_2, \\ w &= w_1 + w_2. \end{aligned}$$

При этом составляющие смещений u_1, v_1, w_1 удовлетворяют условиям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial z} - \frac{\partial w_1}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

которые будут выполнены, если u_1, v_1, w_1 имеют потенциал, следовательно

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v_1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ w_1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned} \right\}. \quad (4)$$

При этом составляющие смещений u_2, v_2, w_2 удовлетворяют условиям:

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2} = 0. \quad (5)$$

Таким образом, составляющие полного смещения грунта равны:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + u_2, \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} + v_2, \\ w &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} + w_2. \end{aligned}$$

Подставив эти значения u, v, w в (1), получим следующие уравнения, которым должны удовлетворять φ и u, v, w :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 \varphi, \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= b^2 \nabla^2 u_2, \\ \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} &= b^2 \nabla^2 v_2, \\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} &= b^2 \nabla^2 w_2 \end{aligned} \right\}, \quad (7)$$

где

$$a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad (8)$$

$$b^2 = \frac{\mu}{\rho}. \quad (9)$$

Дифференциальные уравнения (6) и (7) отличаются между собой только коэффициентами при ∇^2 .

Выражения (3) представляют собой составляющие вектора вращения, поэтому очевидно, что распространяющаяся в грунте волна, определяемая уравнением (6), не вызывает деформаций сдвига. Деформации, соответствующие этой волне, таковы, что грунт претерпевает только относительное изменение объема, которое равно:

$$\Delta_1 = \nabla^2 \varphi.$$

Таким образом, волна, соответствующая дифференциальному уравнению (6), есть волна сжатия и расширения. Наоборот, условие (5) показывает, что для волн, составляющие которых удовлетворяют уравнениям (7), изменение объема не имеет места [7, 8]. При распространении этих волн элементы грунта испытывают только относительные сдвиги, составляющие которых равны:

$$\begin{aligned} 2\omega_x &= \frac{\partial w_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \\ 2\omega_y &= \frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0, \\ 2\omega_z &= \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, волны, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям (7), суть волны сдвига.

При распространении волн сжатия и расширения смещения грунта параллельны их распространению, поэтому данной разновидности волны называют еще продольными.

Волны сдвига могут быть названы поперечными, так как при распространении их возникают лишь смещения частиц грунта, перпендикулярные распространению волн.

Интеграл дифференциального волнового уравнения типа (6) или (7) может быть взят в виде [9, 10]:

$$\frac{1}{r} F\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

где r – радиус-вектор рассматриваемой точки; F – произвольная функции, удовлетворяющая начальным и граничным условиям задачи; c – скорость распространения волны (для продольных волн $c = a$, а для поперечных волн $c = b$).

Воспользовавшись формулами (2), можно выражения (8) и (9) для скоростей волн сжатия и сдвига привести к виду:

$$a = \sqrt{\frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}} \frac{E}{\rho} \quad (10)$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{2(1+\sigma)}} \frac{E}{\rho} \quad (11)$$

Результаты и обсуждение

В качестве примера успешного использования полученных зависимостей авторами был разработан проект устройства вибрационной защиты фундаментов турбогенераторов от воздействия колебаний сырьевой мельницы. Данный проект разработан по заданию дирекции ОАО «Мордовцемент». Причиной обращения послужило возрастание колебаний турбогенератора в период завершения помола сырья в мельнице и возникновение в связи с этим предельно допустимых амплитуд колебаний на вибрационных датчиках турбогенератора [11, 12].

Согласно «Техническому отчету об инженерно-геологических изысканиях на объекте: Технологическая линия сухого способа производства цемента производительностью 6000 тн.

клинкера в сутки в п. Комсомольский Чамзинского района РМ» арх. № 8199, выполненного Мордовским институтом инженерных изысканий и проектирования», основанием фундаментов мельницы и турбогенераторов является слой глины мягкопластичной ($E = 5$ МПа, $\sigma = 0,4$, $\rho = 18$ кН/м³). Тогда для скоростей распространения волн будем иметь:

$$a = \sqrt{\frac{1-0,4}{(1+0,4)(1-2\cdot 0,45)}} \frac{5 \cdot 10^6}{18} = 771 \text{ м/сек},$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{2(1+0,4)}} \frac{5 \cdot 10^6}{18} = 315 \text{ м/сек}.$$

Учитывая, что частота колебаний главного привода – 42 сек⁻¹, длина волн:

- продольной – $h_1 = \frac{a}{\omega_1} = \frac{771}{42} = 18,4$ м;
- поперечной – $h_2 = \frac{b}{\omega_2} = \frac{315}{42} = 7,5$ м.

Определим амплитуды вертикальной составляющей колебаний грунта, вызванных сотрясениями фундамента мельницы [13, 14].

Площадь фундамента под мельницу: $F_M = 36 \times 26 = 936$ м².

Коэффициент упругого равномерного сжатия грунта [1] $C_z = 5$ кг/см³.

Амплитуда вертикальных колебаний фундамента $A_z = 1,5$ мм.

Частота собственных вертикальных колебаний $\omega = 42$ сек⁻¹.

Скорость распространения поперечных волн $b = 315$ м/сек.

Модуль сдвига для грунта $\mu = 1,8$ МПа.

Определяем радиус эквивалентного круга:

$$R = \sqrt{\frac{F_M}{\pi}} = \sqrt{\frac{936}{3,14}} = 17,26 \text{ м}.$$

Находим коэффициент χ :

$$\chi = \frac{\omega}{b} = \frac{42}{315} = 0,133.$$

Следовательно,

$$\chi R = 0,133 \cdot 17,26 = 2,295.$$

По таблицам находим функцию Бесселя первого рода:

$$\begin{aligned} J_1(\chi R) &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\chi R}} \sin\left(\chi R - \frac{\pi}{4}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3,14 \cdot 0,133 \cdot 17,26}} \sin\left(0,133 \cdot 17,26 - \frac{3,14}{4}\right) = \\ &= -0,015. \end{aligned}$$

Динамическое давление на грунт будет:

$$p = C_z A_z = 5 \cdot 0,15 = 0,75 \text{ кг/см}^2.$$

Значение коэффициента K_0 примем по таблице 26 [1]:

$$K_0 = 0,108 + \frac{0,183 - 0,108}{0,5 - 0,25} (0,4 - 0,25) = 0,153.$$

Подставив полученные значения в (4.9) [1], получим:

$$\begin{aligned} A_w &= \frac{\pi p R K_0}{\mu} J_1(\chi R) \sqrt{\frac{2}{\pi \chi x}} = \\ &= \frac{3,14 \cdot 7,5 \cdot 17,26 \cdot 0,153}{1,8 \cdot 10^3} 0,015 \sqrt{\frac{2}{3,14 \cdot 0,133 x}} = 0,36 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

На расстоянии 20 м от источника колебаний получим амплитуду вертикальной составляющей грунта, равную 0,08 мм. Примем коэффициент поглощения энергии волн грунтом равным $0,04 \text{ м}^{-1}$. Тогда амплитуда на расстоянии, большем 8 м от центра фундамента, будет определяться из выражения:

$$A_r = \frac{0,36}{\sqrt{r}} e^{-0,04(r-20)}.$$

График изменения амплитуд с расстоянием представлен на рисунке 1.

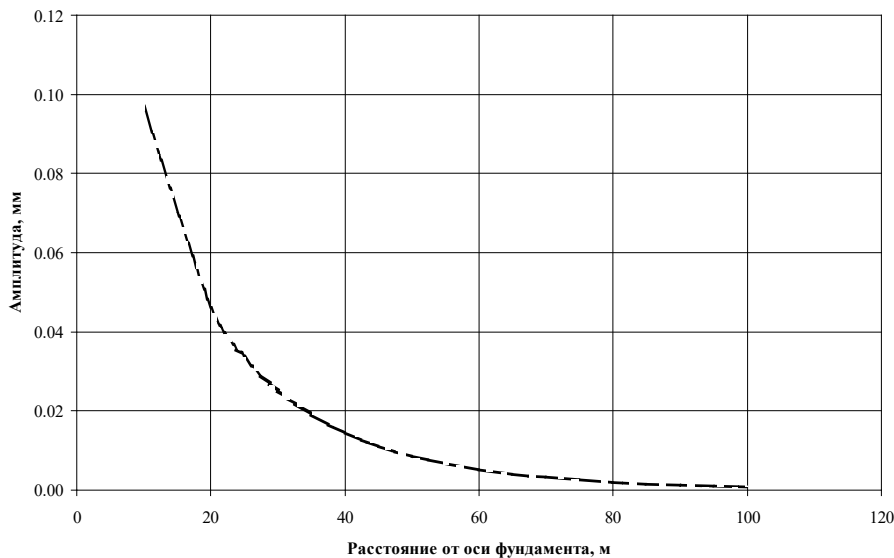


Рис. 1. График изменения амплитуд с расстоянием

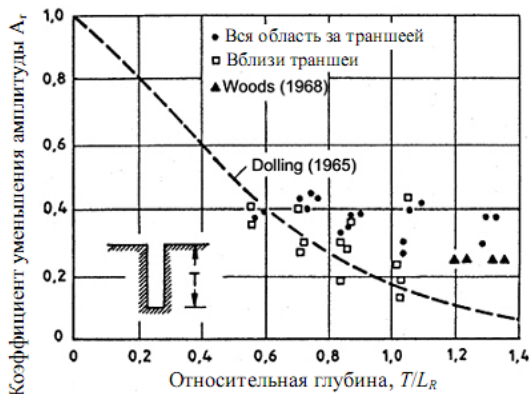


Рис. 2. Результаты опытов по виброизоляции на моделях открытых траншей (Наурт, 1981). Результаты исследований Вудса (Woods, 1968) и спрямление кривой по прогнозу Доллинга (Dolling, 1965).

Согласно исследованиям, проведенным зарубежными и отечественными специалистами в области виброзащиты зданий и сооружений [15],

наиболее оптимальной глубиной виброзащитного экрана является величина, равная длине волны колебаний.

Так, при глубине, равной длине волны, амплитуда колебаний уменьшается на 80 %, при глубине 0,8 длины волны – на 70 %, при 0,6 – на 60 % и т. п. (рис. 2). При этом ширина экрана не влияет на параметры колебаний.

Заключение

В рассматриваемом случае повышенные амплитуды колебаний турбогенератора вызваны, очевидно, поперечной волной, длина которой $h_2 = 7,5 \text{ м}$.

Принимая во внимание вышеизложенные расчеты, было рекомендовано выполнить виброзащитный экран высотой 6 м, что по нашим оценкам приведет к снижению амплитуды дополнительных колебаний на 70 %.

Поскольку фундамент турбогенератора воспринимает вибрационные воздействия не только от мельницы, считаем необходимым рекомендовать контрольные замеры и сопоставление параметров колебаний фундаментов турбогенераторов и мельницы.

Список литературы

1. Баркан Д. Д. Динамика оснований и фундаментов / Д. Д. Баркан. – Москва : Стройвоенмориздат, 1948. – 412 с.
2. Справочник по динамике сооружений / под ред. Б. Г. Коренева. – Москва : Стройиздат, 1972. – 511 с.
3. Massarsch K. R. Bodenvibrationsabschirmung mittels Gasmatten / K. R. Massarsch. – Deutsche Baugrung, Hamburg. – P. 161–192.
4. Бронштейн И. Н. Справочник по математике / И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев ; под ред. Г. Гроше и В. Циглера ; пер. с нем. – Москва : Наука, Физматгиз, 1981. – 718 с.
5. Розин Л. А. Стержневые системы как системы конечных элементов / Л. А. Розин. – Ленинград : Ленинградский государственный университет имени А.С. Пушкина, 1976. – 232 с.

6. Гарькин И. Н. Деформативно-прочностные свойства монолитных железобетонных перекрытий / И. Н. Гарькин, Д. С. Саденко // Региональная архитектура и строительство. – 2020. – № 1 (42). – С. 126–129.
7. Евсеев А. Е. Колебания систем с одной степенью свободы: графическое представление действительных и комплексных корней характеристических уравнений / А. Е. Евсеев, И. А. Евсеев, И. Н. Гарькин // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. – 2023. – № 1 (43). – С. 56–61.
8. Кузин Н. Я. Оценка внешних факторов на несущую способность конструкций гражданских зданий / Н. Я. Кузин, С. Г. Багдоев // Региональная архитектура и строительство. – 2012. – № 2. – С. 79–82.
9. Евсеев А. Е. Способ получения матрицы жесткости стержневого конечного элемента для деформационного расчета по дифференциальному уравнению / А. Е. Евсеев, И. Н. Гарькин, Ф. М. Ахметов // Системные технологии. – 2024. – № 2 (51). – С. 5–13.
10. Евсеев А. Е. Формирование матриц жесткости стержня по дифференциальному уравнению при его изгибе / А. Е. Евсеев, И. Н. Гарькин, Э. Ю. Абдуллазянов // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. – 2024. – № 3 (49). – С. 57–65.
11. Тер-Мартirosян З. Г. Перемещение длинного стержня сквозь песчаный образец под действием динамической нагрузки / З. Г. Тер-Мартirosян // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. – 2022. – № 3 (41). – С. 27–31. – DOI 10.52684/2312-3702-2022-41-3-27-31.
12. Баламирзоев А. Г. Нелинейные поперечные колебания составных стержней при действии статически приложенной поперечной нагрузки / А. Г. Баламирзоев, М. М. Муртузов, Д. Н. Селимханов, З. Г. Дибирова, А. Р. Абдуллаев // Строительные материалы и изделия. – 2021. – Т. 4, № 2. – С. 29–37.
13. Сабитов Л. С. Напряженно-деформированное состояние слабokonичного стержня переменного сечения / Л. С. Сабитов, И. Л. Кузнецов, А. У. Богданович // Вестник Иркутского государственного технического университета. – 2014. – № 7 (90). – С. 71–77.
14. Колобанов А. С. Об особенностях работ тонколистовых стальных конструкций в условиях агрессивных сред / А. С. Колобанов, Н. В. Тарасова, Д. С. Сорокина, Л. С. Сабитов, А. В. Гречишкин // Инженерный вестник Дона. – 2023. – № 7 (103). – С. 277–285.
15. Чепурненко В. С. Совершенствование расчета гибких трубобетонных колонн с учетом обжатия в плоскостях сечений / В. С. Чепурненко, К. Н. Хашхожев, С. Б. Языев, А. А. Аваков // Строительные материалы и изделия. – 2021. – Т. 4, № 3. – С. 41–53.

© А. Е. Евсеев, И. Н. Гарькин, Э. Ю. Абдуллазянов

Ссылка для цитирования:

Евсеев А. Е., Гарькин И. Н., Абдуллазянов Э. Ю. Использование дифференциальных уравнений движения тела при определении параметров виброзащиты // Инженерно-строительный вестник Прикаспия : научно-технический журнал / Астраханский государственный архитектурно-строительный университет. Астрахань : ГБОУ АО ВО «АГАСУ», 2024. № 4 (50). С. 127–131.