7. Cherkasov V. Prediction of radiation shielding properties of self adhesive elastic coating / V. Cherkasov, V. Avdonin, Yu. Yurkin, D. Suntsov // Materials physics and mechanics. – 2019. – Vol. 42, № 6. – P. 825–836.
8. He X. Z. Damping properties of ethylene-vinyl acetate rubber/polylactic acid blends / X. Z. He, M. Qu, X. Y. Shi // Journal of Materials Science and Chemical Engineering. – 2016. – Vol. 4, № 3. – P. 15–22.
9. Адоньева А. А. Взаимосвязь качественных показателей пластификаторов и свойств полимерно-битумных вяжущих / А. А. Адоньева, П. А. Лукьянец, Н. А. Лушников, А. С. Покатаев, Н. И. Савенкова, В. Е. Николаевский, Д. Ю. Небратенко // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. – 2022. – № 3 (41). – С. 51–56.
10. Адоньева А. А. Методика оценки агрегатного состояния после промораживания пластификаторов для полимерно-битумных вяжущих / А. А. Адоньева, И. А. Ефремов, А. С. Покатаев, Н. И. Савенкова, Д. Ю. Небратенко // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. – 2022. – № 1 (39). – С. 41–47.
11. Bolgar M. Handbook for the chemical analysis of plastic and polymer additives / M. Bolgar, J. Hubball, J. Groeger, S. Meronek. – CRC Press, 2008. – 481 p.
12. Murphy J. Additives for plastics handbook / J. Murphy. – Elsevier Science, 2001. – 484 p.
13. Landel R. Mechanical Properties of Polymers and Composites / R. Landel, L. Nielsen. – CRC Press, 1993. – 580 p.
14. Khonakdar H. A. Dynamic mechanical properties and morphology of polyethylene/ethylene vinyl acetate copolymer blends / H. A. Khonakdar, U. Wagenknecht, S. H. Jafari, R. Hassler, H. Eslami // Advances in Polymer Technology. – 2004. – Vol. 23. № 4. – P. 307–315.
15. Ljungberg N. The effects of plasticizers on the dynamic mechanical and thermal properties of poly (lactic acid) / N. Ljungberg, B. Wessle´n // Journal of Applied Polymer Science. – 2002. – Vol. 86, № 5. – P. 1227–1234.
16. Varughese S. Effect of plasticizer type and concentration on the dynamic mechanical properties of epoxidized natural rubber vulcanizates / S. Varughese, D. K. Tripathy // Journal of Elastomers and Plastics. – 1993. – Vol. 25, № 4. – P. 343–357.
17. Wypych A. Databook of plasticizers / A. Wypych. – ChemTec Publishing, 2017. – 696 p.
18. Wypych G. Handbook of plasticizers / G. Wypych. – ChemTec Publishing, 2004. – 693 p.
19. Wang Z. Plasticization effect of transgenic soybean oil. I. on ethylene propylene diene monomer (EPDM), as substitute for paraffin oil / Z. Wang, Y. Han, X. Zhang, Z. Huang, L. Zhang // Journal of Applied Polymer Science. – 2013. – Vol. 130, № 6. – P. 4457–4463.
20. Li X. The effect of paraffinic oil and aromatic oil on the crosslinks and physical properties of butyl rubber / X. Li, S. Tan, G. Liu, M. Hoch, S. Zhao // Journal of Macromolecular Science. – 2016. – Vol. 55, № 5. – P. 494–502.
21. Alekseev A. A. Plastification of styrene-butadiene block copolymer by radial structure with industrial oils / A. A. Alekseev, T. V. Petuhova, V. S. Osipchik, E. A. Kirichenko // Chemistry and Chemical Technology. – 2009. – Vol. 52, № 6. – P. 99–102.
22. Черкасов В. Д. Влияние модифицирующих добавок на динамические свойства полимерных материалов на основе этиленвинилацетата / В. Д. Черкасов, В. В. Авдонин, А. Н. Волоцкой, Ю. В. Юркин, И. А. Мансурова // Региональная архитектура и строительство. – 2018. – № 4 (37). – С. 20–29.

Ссылка для цитирования:
Волоцкой А. Н., Авдонин В. В. Вибропоглощающие полимерные материалы на основе этиленвинилацетата: выбор пластификатора // Инженерно-строительный вестник Прикаспия : научно-технический журнал / Астраханский государственный архитектурно-строительный университет. Астрахань : ГБОУ АО ВО «АГАСУ», 2024. № 4 (50). С. 87–92.

УДК 539.3
DOI 10.52684/2312-3702-2024-50-4-92-96

УРАВНЕНИЯ МЕЖДУ ДЕФОРМАЦИЯМИ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ УПРУГОГО ТЕЛА ТРЕМЯ ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ ПЛАСТИНАМИ

О. В. Мкртычев

Мкртычев Олег Витальевич, кандидат физико-математических наук, ответственный секретарь периодического сетевого научного издания «Вестник Новороссийского филиала Белгородского государственного технологического университета им. В. Г. Шухова. Серия: Механика и математика», г. Новороссийск, Российская Федерация ; e-mail: oleg214@ya.ru

В этой статье описывается работа над известными уравнениями Коши в линейной теории упругости. Уравнения Коши связывают малые деформации с перемещениями элементарного параллелепипеда деформируемого однородного изотропного тела. Рассматриваются также известные уравнения из теории пластин. Рассматривая обе группы уравнений, автор работы при некоторых дополнительных условиях выводит более сложную форму уравнений Коши. В отличие от исходных уравнений, которые содержат только первые производные от перемещений, полученные – уже производные от перемещений первого, второго и третьего порядка. Это говорит о том, что представленное решение может приводить к более точным результатам при решении задач теории упругости. Однако это решение будет математически более сложным, ввиду большего порядка полученных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: *уравнения Коши, деформации, перемещения, линейная теория упругости, нелинейная теория упругости, пластины, изгибные, мембранные слагаемые.*

EQUATIONS BETWEEN DEFORMATIONS AND DISPLACEMENTS IN MODELING AN ELASTIC BODY WITH THREE MUTUALLY PERPENDICULAR PLATES

O. V. Mkrtychev

Mkrtychev Oleg Vitalyevich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Executive Secretary of the periodic online scientific publication "Bulletin of the Novorossiysk branch of the Belgorod State Technological University named after V. G. Shukhov. Series: Mechanics and Mathematics", Novorossiysk, Russian Federation ; e-mail: oleg214@ya.ru

This article describes the work on the well-known Cauchy equations in the linear theory of elasticity. The Cauchy equations relate small deformations to the displacements of an elementary parallelepiped of a deformable homogeneous isotropic body. The well-known equations from the theory of plates are also considered. Considering both groups of equations, the author of the work, under some additional conditions, derives a more complex form of the Cauchy equations. Unlike the original Cauchy equations, which contain only the first derivatives of displacements, the obtained equations already contain derivatives of displacements of the first, second and third order. This suggests that the presented solution can lead to more accurate results when solving problems of elasticity theory. However, this solution will be mathematically more complex, due to the higher order of the obtained differential equations.

Keywords: *Cauchy equations, deformations, displacements, linear theory of elasticity, nonlinear theory of elasticity, plates, bending terms, membrane terms.*

Введение

Объектом исследования в данной работе являются уравнения, связывающие деформации и перемещения однородного изотропного тела. Задачи линейной теории упругости, в которых рассматриваются малые деформации однородного изотропного тела, являются важными для рассмотрения многих проблем напряженно-деформированного состояния строительных конструкций и их элементов [1–8]. Геометрическую группу уравнений линейной теории упругости составляют шесть дифференциальных уравнений, связывающих деформации с перемещениями элементарного параллелепипеда, известных как уравнения Коши:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e_{xx}} &= \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}},\\
\boldsymbol{e_{yy}} &= \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{y}},\\
\boldsymbol{e_{zz}} &= \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \boldsymbol{z}},\\
\boldsymbol{e_{xy}} &= \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{y}} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}},\\
\boldsymbol{e_{yz}} &= \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{z}} + \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \boldsymbol{y}},\\
\boldsymbol{e_{zx}} &= \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{z}}.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Данные уравнения представляют собой систему упрощенных уравнений, связывающих деформации с перемещениями, в которых оставлены только некоторые производные первого порядка. Часто требуется модифицировать уравнения теории упругости, включая и геометрические уравнения, для решения тех или иных теоретических или прикладных задач [9–16]. Иногда эти модификации связаны с упрощением уравнений упругости, иногда с их усложнением. Переходить к более сложным выражениям вида (1) с учетом производных высших порядков можно также разными способами, то есть переходя от линейных задач деформирования упругих тел к нелинейным задачам. Во всех этих случаях и при применении разных методов будут получаться различные системы уравнений, каждой из которых будет соответствовать своя система физико-механических и математических допущений [17–20]. Цель данной работы – получить систему уравнений, связывающих деформации с перемещениями, с учетом малых величин более высоких порядков.

Метод модифицирования уравнений

Автор предлагает модифицировать геометрические уравнения, связывающие деформации элементарного параллелепипеда с его перемещениями, исходя из аналогичных уравнений для пластин. Следуя [18] и при оговоренных там допущениях, полные деформации пластины, расположенной в плоскости *xy*, в слое, параллельном срединной поверхности и отстоящем от нее на расстоянии *z*, запишем в виде:

$$
\begin{aligned}
e_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\} + \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] z,\\
e_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} + \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] z,\\
e_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} +\\
&+ \left[-2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial w}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\frac{\partial w}{\partial y} + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta w\right] z.
\end{aligned} \tag{2}
$$

В этом выражении опущены члены высшего порядка малости относительно производных от перемещений, и члены со степенями *z*, выше первой. Слагаемые в квадратных скобках в этих выражениях содержат множитель *z* и представляют собой деформации изгиба, равные нулю на срединной поверхности и изменяющиеся по линейному закону в зависимости от расстояния z до срединной поверхности. Если эти слагаемые обозначить подстрочным индексом f:

$$e_{xxf} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\},$$

$$e_{yyf} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\},$$

$$e_{xyf} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y},$$

а остальные слагаемые обозначать подстрочным индексом:

$$e_{xxm} = \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] z,$$

$$e_{yym} = \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] z,$$

$$e_{xym} = \left[-2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial w}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\frac{\partial w}{\partial y} + \right.$$

$$\left. +2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta w\right] z,$$

то каждая деформация будет слагаться из двух частей, изгибаемой и мембранной:

$$e_{xx} = e_{xxf} + e_{xxm},$$

$$e_{yy} = e_{yyf} + e_{yym},$$

$$e_{xy} = e_{xyf} + e_{xym}.$$

Обобщим уравнения (2) в предположении, что деформации элементарного параллелепипеда можно рассмотреть как независимо друг от друга происходящие деформации трех пластин. Итак, (2) написана для пластины в плоскости xy. Для плоскости yz будем соответственно иметь:

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\} + \left[-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] x,$$

$$e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right\} + \left[-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] x, \tag{3}$$

$$e_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z} +$$

$$+\left[-2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}\frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}\frac{\partial u}{\partial z} + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\Delta u\right] x.$$

Аналогично, для плоскости zx будем иметь:

$$e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\} + \left[-\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right] y,$$

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\} + \left[-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] y, \tag{4}$$

$$e_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} +$$

$$+\left[-2\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x}\frac{\partial v}{\partial z} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Delta v\right] y.$$

Ввиду допущения о независимом друг от друга действии происходящих деформаций, результирующие деформации будут равны:

$$e_{xx} = 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\} + \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right] z +$$

$$+\left[-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] y, \tag{5}$$

$$e_{yy} = 2\frac{\partial v}{\partial y} + \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right\} + \left[-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] x +$$

$$+\left[-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] z, \tag{6}$$

$$e_{zz} = 2\frac{\partial w}{\partial z} + \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2\right\} + \left[-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] x +$$

$$+\left[-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] y, \tag{7}$$

$$e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} +$$

$$+\left[-2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial w}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\frac{\partial w}{\partial y} + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta w\right] z, \tag{8}$$

$$e_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z} +$$

$$+\left[-2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z}\frac{\partial u}{\partial y} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}\frac{\partial u}{\partial z} + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\Delta u\right] x, \tag{9}$$

$$e_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} +$$

$$+\left[-2\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x}\frac{\partial v}{\partial z} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Delta v\right] y. \tag{10}$$

Система уравнений (5)–(10) является аналогом геометрических уравнений Коши при сделанных допущениях. При этом первые группы слагаемых в каждом уравнении имеют в этой аналогии смысл изгибных слагаемых, а вторые группы слагаемых (в квадратных скобках) имеют смысл мембранных слагаемых.

Результат модифицирования уравнений

При ряде упрощающих допущений автор [18] записывает упрощенную форму уравнений (2):

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z,$$
$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z, \qquad (11)$$
$$e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z.$$

Соответственно, здесь изгибаемые слагаемые имеют вид:

$$e_{xxf} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,$$
$$e_{yyf} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,$$
$$e_{xyf} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}$$

и мембранные слагаемые имеют вид:

$$e_{xxm} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z,$$
$$e_{yym} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z,$$
$$e_{xym} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z.$$

Применяя тот же прием, для плоскости yz будем соответственно иметь:

$$e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} x,$$
$$e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} x, \qquad (12)$$
$$e_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} x,$$

для плоскости zx будем иметь:

$$e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} y,$$
$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} y, \qquad (13)$$
$$e_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} y,$$

Объединяя (11)–(13), получим связь между деформациями и перемещениями в виде системы уравнений:

$$e_{xx} = 2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} y - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z,$$
$$e_{yy} = 2\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} x - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z,$$
$$e_{zz} = 2\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} x - \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} y, \qquad (14)$$
$$e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z,$$
$$e_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} x,$$
$$e_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} y.$$

Сравнивая полученную систему уравнений (14) с уравнениями Коши (1), можно заметить, что последние получаются из (14) пренебрежением малых величин второго порядка малости. Исключением является только коэффициент «2» перед частными производными $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$. Различие в этих коэффициентах говорит о том, что при выводе уравнений Коши в линейной постановке допускается большее количество упрощений задачи, чем в рассмотренном автором случае.

Выводы

1. Замечание, сделанное для системы уравнений (5)–(10), остается в силе и для системы уравнений (14): первые группы слагаемых в каждом уравнении этой системы имеют в нашей аналогии смысл изгибных слагаемых, а вторые (содержащие в качестве множителей x, y, z) – смысл мембранных слагаемых.

2. Можно отметить, что полученные формы геометрических уравнений теории упругости, поскольку они учитывают большее количество взаимосвязей между деформациями и перемещениями, будут приводить к более точным решениям задач теории упругости.

3. При этом, конечно, сложность решения этих задач возрастет.

Список литературы

1. Амелькин В. В. Об одном подходе к решению смешанных задач теории упругости / В. В. Амелькин, М. Н. Василевич, Л. А. Хвощинская // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. – 2021. – Т. 57, № 3. – С. 263–273.
2. Yavari A. Universal deformations and inhomogeneities in isotropic Cauchy elasticity / A. Yavari // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. – July 2024. – Vol. 480. – DOI: https://doi.org/10.1098/rspa.2024.0229.
3. Сагдатуллин М. К. Численное моделирование процессов нелинейного деформирования оболочек средней толщины / М. К. Сагдатуллин // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2023. – Т. 19, № 2. – С. 130–148.
4. Yu. I. Dimitrienko, et al. Theory of the multilayer thin anisotropic shells, based on the asymptotic analysis of the general equations for the elasticity theory // Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – Vol. 1141. – Art no. 012097. – DOI: 10.1088/1742-6596/1141/1/012097.
5. Ермоленко Г. Ю. Фундаментальное решение уравнения с оператором термоупругости / Г. Ю. Ермоленко, О. В. Мкртычев // Вестник Новороссийского филиала Белгородского государственного технологического университета им. В. Г. Шухова. Серия: механика и математика, – 2022. – № 2 (2). – С. 026–028.
6. Калашников С. Ю. Упругое деформирование брусьев при учете вида напряженного состояния в окрестности рассматриваемой точки / С. Ю. Калашников, Е. В. Гурова // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. – 2021. – № 4 (38). – С. 5–10. – DOI: 10.52684/2312-3702-2021-38-4-5-11.
7. Калашников С. Ю., Гурова Е. В., Шведов Е. Г. Анализ деформирования сжато-изогнутого стержня с индуцированной анизотропией при использовании различных базисных функций в методе Бубнова–Галеркина // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. – 2023. – № 1 (43). – С. 37–44. – DOI: 10.52684/2312-3702-2022-43-1-37-44.

8. Евсеев А. Е. Формирование матриц жесткости стержня по дифференциальному уравнению при его изгибе / А. Е. Евсеев, И. Н. Гарькин, Э. Ю. Абдуллазянов // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. – 2024. – № 3 (49). – С. 57–65. – DOI: 10.52684/2312-3702-2024-49-3-57-65.
9. Itin Yakov. Cauchy relations in linear elasticity: Algebraic and physics aspects / Yakov Itin. – Режим доступа: https://arxiv.org/pdf/2304.09579, свободный. – Заглавие с экрана. – Яз. рус. – DOI: 10.48550/arXiv.2304.09579.
10. John G. Michopoulos. Effects of Elastoplasticity, Damage, and Environmental Exposure on the Behavior of Adhesive Step-Lap Joints / John G. Michopoulos, Nicole A. Apetre, Athanasios P. Iliopoulos, John C. Steuben // Journal of Computing and Information Science in Engineering. – June 2023. – Vol. 23 (3). – P. 030904. – Paper No: JCISE-22-1285. – DOI: 10.1115/1.4056361.
11. Жураева У. Ю. Теоремы типа Фрагмена – Линделефа для бигармонических функций / У. Ю. Жураева // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2022. – № 10. – С. 42–65. – DOI: 10.26907/0021-3446-2022-10-42-65. – EDN: MRVZAP.
12. Остросаблин Н. И. Единственность решения граничных задач статических уравнений теории упругости с несимметричной матрицей модулей упругости / Н. И. Остросаблин // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2022. – Т. 25, № 4 (92). – С. 107–115.
13. Козлов В. В. Апробация определяющих соотношений нелинейной теории упругости при осевом сдвиге полого цилиндра / В. В. Козлов, А. А. Маркин // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2020. – № 63. – С. 102–114.
14. Бакушев С. В. Уточненная линейная теория упругости с учетом квадратичных слагаемых / С. В. Бакушев // Строительная механика и расчет сооружений. – 2023. – № 5 (310). – С. 44–54.
15. Frank Schadt. Differential geometric formulation of the Cauchy Navier equations / Frank Schadt // Mathematical Physics. – Режим доступа: https://arxiv.org/abs/1106.0130v3, свободный. – Заглавие с экрана. – Яз. рус. – DOI: 10.48550/arXiv. 1106.0130.
16. Hackl K. On the existence, uniqueness and completeness of displacements and stress functions in linear elasticity / K. Hackl, U. Zastrow // Journal of Elasticity. – 1988. – № 19 (1). – P. 3–23.
17. Andrade, F. Prediction of stress components using the Beltrami–Michell method / F. Andrade, L. Leite, E. Sibiryakov, B. Sibiryakov // Journal of Applied Geophysics. – 2024. – P. 105309.
18. Доннелл Л. Г. Балки, пластины и оболочки : пер. с англ. / Л. Г. Доннелл ; под ред. Э. И. Григолюка. – Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. – 568 с.
19. Khaldjigitov A. Model Equations of the Theory of Elasticity in Strains: Classical and New Formulations / A. Khaldjigitov, U. Djumayozov // E3S Web of Conferences. – 2024. – Vol. 497. – P. 02015. – DOI: https://doi.org/10.1051/e3sconf/202449702015.
20. Лурье С. А. Уравнения совместности и функции напряжений в теории упругости / С. А. Лурье, П. А. Белов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2022. – № 4. – С. 114–129.

Ссылка для цитирования:
Мкртычев О. В. Уравнения между деформациями и перемещениями при моделировании упругого тела тремя взаимно перпендикулярными пластинами // Инженерно-строительный вестник Прикаспия : научно-технический журнал / Астраханский государственный архитектурно-строительный университет. Астрахань : ГБОУ АО ВО «АГАСУ», 2024. № 4 (50). С. 92–96.