УДК 512.643
DOI 10.52684/2312-3702-2026-55-1-100-104

УРАВНЕНИЕ КАРДАНО – ТАРТАЛЬЯ И МАТРИЦЫ-ЦИРКУЛЯНТЫ

К. Д. Яксубаев, И. В. Аксютина

Яксубаев Камиль Джекишович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры систем автоматизированного проектирования и моделирования, Астраханский государственный архитектурно-строительный университет, г. Астрахань, Российская Федерация, тел.: + 7 (961) 054-22-86; e-mail: yak-mail@yandex.ru;

Аксютина Ирина Владимировна, кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики – 3, МИРЭА – Российский технологический университет, г. Москва, Российская Федерация, тел.: + 7 (905) 362-62-81; e-mail: aksyutina@mail.ru

Общая формула решения алгебраического уравнения третьей степени принадлежит ученым Тарталья и Кардано. В статье предложен новый вывод этой формулы, опирающийся на свойства циркулянтных матриц. Применение циркулянтных матриц к задачам нахождения корней алгебраических уравнений дало следующие результаты. Оказалось, что формула Кардано - Тарталья дает не один набор корней кубического уравнения, а дает целых шесть наборов корней одного и того же кубического уравнения. Но все остальные пять наборов являются перестановками корней первого набора корней кубического уравнения. Другими словами, формула Кардано - Тарталья для корней кубического уравнения дает все шесть перестановок корней этого же кубического уравнения. Результаты статьи показывают, что циркулянтные матрицы органично входят в задачи нахождения корней алгебраических уравнений.

Ключевые слова: *кубическое уравнение, циркулянтные матрицы, формула Кардано – Тарталья, Mathcad.*

THE CARDANO – TARTAGLIA EQUATION AND CIRCULANT MATRICES

K. D. Yaksubayev, I. V. Aksyutina

Yaksubaev Kamil Dzhekishovich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Computer-aided Design and Modeling Department, Astrakhan State University of Architecture and Civil Engineering, Astrakhan, Russian Federation, phone: + 7 (961) 054-22-86; e-mail: yak-mail@yandex.ru;

Aksyutina Irina Vladimirovna, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor of High Mathematics – 3 Department, MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russian Federation, phone: + 7 (905) 362-62-81; e-mail: aksyutina@mail.ru

The general formula for solving an algebraic equation of the third degree belongs to scientists Tartaglia and Cardano. The paper proposes a new derivation of this formula based on the properties of circulant matrices. The application of circulant matrices to the problems of finding the roots of algebraic equations has yielded the following results. It turned out that the Cardano - Tartaglia formula does not give one set of roots of a cubic equation, but gives as many as six sets of roots of the same cubic equation. But all the other five sets are permutations of the roots of the first set of roots of the cubic equation. In other words, the Cardano – Tartaglia formula for the roots of a cubic equation gives all six permutations of the roots of the same cubic equation. The results of the article show that circulant matrices are organically included in the problem of finding the roots of algebraic equations.

Keywords: *cubic equation, circulant matrices, Cardano formula, Mathcad.*

Введение

Циркулянтные матрицы широко используются во многих технических науках. И сфера использования циркулянтных матриц постоянно расширяется [1–19]. В настоящей работе найдена еще одна область применимости красивой теории циркулянтных матриц. Оказалось, что аналитические решения алгебраических уравнений находят свое логическое завершение на языке циркулянтных матриц. Работа над этой теории началась со следующей теоремы.

В работе [1] доказана важная теорема.

Теорема. Для каждого кубического многочлена $p(x)$ существуют $6 = 3!$ матриц циркулянтов, характеристический многочлен которых, с учетом знака при высшем члене и есть $p(x)$.

Сейчас мы приведем новое, прямое доказательство данной теоремы.

Метод

При прямом доказательстве этой теоремы использовались методы комплексного анализа и возможности математического пакета Mathcad.

Рассмотрим кубический многочлен: $p(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$. Циркулянтные матрицы третьего порядка имеют вид:

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_3 & z_1 & z_2 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{pmatrix}$$

Будем искать циркулянтную матрицу с таким же характеристическим многочленом $p(x)$ с учетом знака при старшем члене:

$$\left| - \begin{vmatrix} z_1 - x & z_2 & z_3 \\ z_3 & z_1 - x & z_2 \\ z_2 & z_3 & z_1 - x \end{vmatrix} = \right.$$
$$\left| = x^3 + bx^2 + cx + d \right.$$

Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} 3z_1z_2z_3 - z_1^3 - z_2^3 - z_3^3 \\ 3z_1^2 - 3z_2z_3 \\ -3z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ c \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z_2^3 + z_3^3 \\ z_2z_3 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{bc}{3} - \frac{2b^3}{27} - d \\ \frac{b^2}{9} - \frac{c}{3} \\ -\frac{b}{3} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} z_2^3 + z_3^3 = \frac{bc}{3} - \frac{2b^3}{27} - d = A \\ z_2^3z_3^3 = \left(\frac{b^2}{9} - \frac{c}{3}\right)^3 = B \end{cases}$$

Эта система сводиться квадратному уравнению: $x^2 - Ax + B = 0$. Получим следующие решения. Первое решение:

$$\begin{cases} z_2 = \sqrt[3]{\frac{A - \sqrt{A^2 - 4B}}{2}} = \sqrt[3]{x_2} \\ z_3 = \sqrt[3]{\frac{A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2}} = \sqrt[3]{x_3} \end{cases}$$

Кубический корень из числа имеет три ответа. Поэтому здесь мы имеем не одно решение, а целых девять решений. То есть мы имеем девять пар чисел (z_2, z_3), которые являются решением данной системы.

Второе решение:

$$\begin{cases} z_2 = \sqrt[3]{x_3} \\ z_3 = \sqrt[3]{x_2} \end{cases}$$

Здесь мы тоже имеем не одно решение, а целых девять решений. То есть мы имеем девять пар чисел (z_2, z_3), которые являются решением данной системы. В итоге мы получили восемнадцать решений системы.

Вернемся к исходной системе уравнений:

$$\begin{pmatrix} z_2^3 + z_3^3 \\ z_2z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{bc}{3} - \frac{2b^3}{27} - d \\ \frac{b^2}{9} - \frac{c}{3} \end{pmatrix}$$

Из восемнадцати решений системы мы должны отобрать только решения, которые удовлетворяют уравнению $z_2z_3 = \frac{b^2}{9} - \frac{c}{3}$. Таких решений останется только шесть. И мы получим шесть матриц циркулянтов, которые имеют один и тоже характеристический многочлен $p(x)$, с учетом знака при старшем члене.

Определение. Аргументом комплексного числа z называется тот угол $Arg(z)$ этого комплексного числа, который лежит в пределах:

$$-\pi < Arg(z) \leq \pi.$$

Теорема. Рассмотрим комплексное число $z = \rho e^{iArg(z)}$. Тогда корни кубические из этого числа задаются следующими формулами:

$$\sqrt[3]{z} = z^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\rho} e^{i\frac{Arg(z)}{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ e^{i\frac{4\pi}{3}} \end{pmatrix}$$

Вернемся к первому решению системы:

$$\begin{cases} z_2 = \sqrt[3]{x_2} \\ z_3 = \sqrt[3]{x_3} \end{cases}$$

Получим:

$$z_2 = \sqrt[3]{|x_2|}\, e^{i\frac{Arg(x_2)}{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ e^{i\frac{4\pi}{3}} \end{pmatrix}$$

$$z_3 = \sqrt[3]{|x_3|}\, e^{i\frac{Arg(x_3)}{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ e^{i\frac{4\pi}{3}} \end{pmatrix}$$

Построим следующую матрицу:

$$\left| \begin{array}{l} i := 1..3;\ j := 1..3 \\ D = \sqrt[3]{|x_2|}\, e^{i\frac{Arg(x_2)}{3}} \sqrt[3]{|x_3|}\, e^{i\frac{Arg(x_3)}{3}} \\ \left(z_{2i}\, z_{3j} \right) = D \begin{pmatrix} 1 & e^{\frac{2\pi i}{3}} & e^{\frac{4\pi i}{3}} \\ e^{\frac{2\pi i}{3}} & e^{\frac{4\pi i}{3}} & 1 \\ e^{\frac{4\pi i}{3}} & 1 & e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

Из девяти членов построенной матрицы только три будут удовлетворять условию:

$$\left(z_{2i}\, z_{3j} \right) = \frac{b^2}{9} - \frac{c}{3}$$

Вот эти три решения и будут настоящими решениями. А все остальные члены матрицы дают только посторонние решения. Но заранее, чисто алгебраическими методами невозможно выявить настоящие три решения из девяти членов матрицы.

Будем считать, что $z1_2 \neq 0$. Получим три циркулянтные матрицы:

$$\begin{pmatrix} z1_2 \\ z1_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{|x_2|}\, e^{i\frac{Arg(x_2)}{3}} \\ z1_3 = \dfrac{\frac{b^2}{9} - \frac{c}{3}}{z1_2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z2_2 \\ z2_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z1_2\, e^{i\frac{2\pi i}{3}} \\ z1_3\, e^{i\frac{4\pi i}{3}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} z3_2 \\ z3_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z1_2\, e^{i\frac{4\pi i}{3}} \\ z1_3\, e^{i\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix}$$

Заменой $x_2 \leftrightarrow x_3$ мы получим еще три циркулянтные матрицы. Общий вид циркулянтных матриц:

$$\left| \begin{array}{l} z1_1 = z2_1 = z3_1 = \frac{-b}{3} \\ z4_1 = z5_1 = z6_1 = \frac{-b}{3} \end{array} \right.$$

$$Z1 = \begin{pmatrix} z1_1 & z1_2 & z1_3 \\ z1_3 & z1_1 & z1_2 \\ z1_2 & z1_3 & z1_1 \end{pmatrix}$$

Аналогичный вид имеют матрицы:

$$Z2, Z3, Z4, Z5, Z6$$

Эти шесть матриц не являются независимыми матрицами. Вторая матрица выражается через первую матрицу следующим образом:

$$\left| \begin{array}{l} S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{4\pi}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{2\pi}{3}} \end{pmatrix} \\ W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\pi}{3}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{4\pi}{3}} \end{pmatrix} \\ Z2 = S \cdot Z1 \cdot W \end{array} \right.$$

Аналогично выражается третья матрица. Рассмотрим матрицу дискретного преобразования Фурье:

$$\mathrm{F} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{e}^{-\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}} & \mathrm{e}^{-\frac{4\pi \mathrm{i}}{3}} \\ 1 & \mathrm{e}^{-\frac{4\pi \mathrm{i}}{3}} & \mathrm{e}^{-\frac{8\pi \mathrm{i}}{3}} \end{pmatrix}$$

Матрица комплексно сопряженная к ней такова:

$$F^{*} = \overline{F^{T}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{\frac{2\pi i}{3}} & e^{\frac{4\pi i}{3}} \\ 1 & e^{\frac{4\pi i}{3}} & e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix}$$

Матрицы $\mathrm{F}^{*}, \mathrm{F}$ связаны между собой следующим образом:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} F^{*}$$

Собственные числа первой циркулянтной матрицы таковы:

$$\begin{pmatrix} \lambda 1_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda 1_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda 1_3 \end{pmatrix} = \mathrm{F}^{*} Z1\mathrm{F}$$

Применим дважды матрицу перестановок. Получим следующий результат*:*

$$\begin{pmatrix} \lambda 2_1 \\ \lambda 2_2 \\ \lambda 2_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda 1_3 \\ \lambda 1_1 \\ \lambda 1_2 \end{pmatrix}$$

Результаты и обсуждение

Полученный результат означает, что собственные числа второй циркулянтной матрицы отличаются от собственных числе первой циркулянтной матрицей только перестановками собственных чисел. Точно также доказывается, что собственные числа третьей циркулянтной матрицы являются перестановкой собственных числе первой циркулянтной матрицы:

$$\begin{pmatrix} \lambda 3_1 \\ \lambda 3_2 \\ \lambda 3_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda 1_2 \\ \lambda 1_3 \\ \lambda 1_1 \end{pmatrix}$$

Мы знаем, что существует ровно шесть различных циркулянтных матриц, имеющих один и тоже характеристический многочлен. Причем четвертая, пятая, шестая циркулянтные матрицы получаются из первой, второй, третьей циркулянтных матриц транспонированием или заменой $\mathrm{z}_2 \leftrightarrow \mathrm{z}_3$. Они дадут три новых решений в форме перестановок корней первой циркулянтной матрицы. Получим группу перестановок корней кубического уравнения из шести перестановок.

Еще раз опишем алгоритм нахождения корней кубического уравнений, который дает не одно решение, а целых шесть решений. И каждое решение отличается от другого решения только перестановкой корней. Этот алгоритм является все тем же алгоритмом Кардано – Тарталья записанное в матричной форме:

$$\left|\begin{array}{ll} \Lambda 1 = F^{*}Z1F & \Lambda 4 = F^{*}Z4F \\ \Lambda 2 = F^{*}Z2F & \Lambda 5 = F^{*}Z5F \\ \Lambda 3 = F^{*}Z3F & \Lambda 6 = F^{*}Z6F \end{array}\right.$$

Организуем просчет по полученным формулам. Возьмем многочлен с известными действительными корнями*:*

$$\left|\begin{array}{c} p(x) = (x+4)(x-1)(x-6) \\ (-4;\quad 1;\quad 6) \end{array}\right.$$

Получим следующие значения корней, вычисленные по формуле Кардано в матричной форме:

$$\left|\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \end{array}\right.$$

Отметим, что мы получили все шесть перестановок корней кубического уравнения. Организуем еще один просчет по полученным формулам. Возьмем многочлен с одним действительным корнем и двумя известными комплексно сопряженными корнями:

$$\left|\begin{array}{l} p(x) = \\ (x-4)(x^2+2x+10)(x-6) \\ = x^3 - 2x^2 + 2x - 40 \\ (4;\quad -1-3i;\quad -1+3i) \end{array}\right.$$

Получим следующие значения корней, вычисленные по формуле Кардано – Тарталья в матричной форме:

$$\left|\begin{array}{l} (-1+3i;\ -1-3i; 4) \\ (4;\ -1+3i;\ -1-3i) \\ (-1-3i; 4; -1+3i\ ) \end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l} (4; -1-3i;\ -1+3i) \\ (-1+3i; 4;\ -1-3i) \\ (-1-3i; -1+3i; 4\ ) \end{array}\right.$$

Заключение

В настоящей работе показано, что формула Кардано – Тарталья, изложенная на языке циркулянтных матриц, дает шесть наборов корней кубического уравнения. И все эти шесть наборов корней образуют группу перестановок корней изучаемого кубического уравнения.

Список литературы

1. Яксубаев К. Д. Матрицы – циркулянты третьего порядка / К. Д. Яксубаев, О. А. Гордеева // Инновационное развитие регионов: потенциал науки и современного образования : материалы VIII Национальной научно-практической конференции с международным участием, приуроченной ко Дню российской науки 10 февраля 2025 г. – Астрахань : Астраханский государственный архитектурно-строительный университет, 2025. – С. 516–519.
2. Хоменко Т. В. Параметрический сплайн, построенный на основе оператора lspline пакета Mathcad / Т. В. Хоменко, К. Д. Яксубаев // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. – 2021. – № 1 (35). – С. 86–88.
3. Яксубаев К. Д. Подавление осцилляции интерполяционного многочлена Лагранжа / К. Д. Яксубаев // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. – 2021. – № 3 (37). – С. 145–151.
4. Кострикин А. И. Введение в алгебру / А. И. Кострикин. – Москвам : МЦНМО, 2018, – 272 с.

5. Чжан В. Оптимизированные алгоритмы для кодов с низкой плотностью проверок на четность и их применение в системах связи / В. Чжан. – Томск : Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2025. – 135 с.

6. Bouchaib A. Good Quasi-Cyclic Codes from Circulant Matrices Concatenation using a Heuristic Method / A. Bouchaib, S. Noun, M. Belkasmi, H. Zouaki // International Journal of Advanced Computer Science and Applications. – 2016. – Vol. 7, no. 9.

7. Балонин Ю. Н. Негациклические матрицы и фильтры Мерсенна / Ю. Н. Балонин, И. С. Егорова, А. М. Сергеев. – Санкт-Петербург : Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, 2019. – С. 11.

8. Harmuth H. F. Applications of Walsh Functions in Communications / H. F. Harmuth // IEEE Spectrum. – 1969. – № 6. – P. 82–91.

9. Rademacher H. Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen / H. Rademacher // Math. Ann. – 1922. – Vol. 87, № 1–2. – P. 112–138.

10. Zhong X. Joint source-channel coding system for 6G communication: Design, prototype and future directions / X. Zhong, C.-W. Sham, S. L. Ma, H.-F. Chou, A. Mostaani, T. X. Vu, S. Chatzinotas // IEEE Access. – 2024.

11. Прокопенко Н. Ю. Дискретная математика : учебное пособие / Н. Ю. Прокопенко. – Нижний Новгород : Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, 2016, – 251 с.

12. Pollock D. S. Circulant matrices and time-series analysis / D. S. Pollock. – Queen Mary, University of London, 2001. – 20 p.

13. Davis P. J. Circulant Matrices / P. J. Davis. – New York : John Wiley and Sons, 1979.

14. Muir T. The Theory of Circulants in the Historical Order of Development up to 1860 / T. Muir // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. – 1906. – Vol. 26. – P. 390–398.

15. Muir T. The Theory of Circulants from 1861 to 1880 / T. Muir // Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. – 1911. – Vol. 32. – P.136–149.

16. Morrison K. E. Generalization of Circulant Matrices for Non-Abelian Groups / K. E. Morrison. – Department of Mathematics California Polytechnic State University San Luis Obispo, CA 93407.

17. Стройникова Е. Д. Оптимизация цифровой обработки сигналов с использованием структурных алгоритмов для матриц некоторых кодов Якоби / Е. Д. Стройникова. – Минск : Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники П. Бровки, 2006.

18. Волчков В. П. Представление случайных процессов векторной рекуррентной циркулянтной моделью второго порядка / В. П. Волчков, Н. Е. Поборчая // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал ИРЭ РАН). – 2013. – № 12. – Режим доступа: http://jre.cplire.ru/jre/dec13/14/text.pdf, свободный. – Заглавие с экрана. – Яз. рус.

19. Волчков В. П. ппроксимация, фильтрация и сглаживание случайных сигналов с помощью рекуррентных циркулянтных моделей скользящего окна / В. П. Волчков, Н. Е. Поборчая, А. М. Шлома // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер. История. Политология. Экономика. Информатика. – 2013. – Вып. 28/1, № 22 (165). – С. 135–143.

References

1. Yaksubaev K. D., Gordeeva O. A. Matritsi – tsirkulyanti tretego poryadka [Matrices – third-order circulant matrices. Innovative development of regions: potential of science and modern education]. *Innovatsionnoe razvitie regionov: potentsial nauki i sovremennogo obrazovaniya : materiali VIII Natsionalnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii s mezhdu-narodnim uchastiem, priurochennoi ko Dnyu rossiiskoi nauki 10 fevralya 2025 g.* [Proceedings of the VIII National Scientific and Practical Conference with International Participation, Dedicated to the Day of Russian Science, February 10, 2025]. Astrakhan: Astrakhanskii gosudarstvennii arkhitekturno-stroitelnii universitet; 2025, pp. 516–519.

2. Khomenko T. V., Yaksubaev K. D. Parametricheskii splain, postroennii na osnove operatora lspline paketa Mathcad [Parametric spline constructed based on the lspline operator of the Mathcad package]. *Inzhenerno-stroitelnii vestnik Prikaspiya* [Engineering and Construction Bulletin of the Caspian Region]. 2021, no. 1 (35), pp. 86–88.

3. Yaksubaev K. D. Podavlenie ostsillyatsii interpolyatsionnogo mnogochlena Lagranzha [Suppression of oscillations of the Lagrange interpolation polynomial]. *Inzhenerno-stroitelnii vestnik Prikaspiya* [Engineering and Construction Bulletin of the Caspian Region]. 2021, no. 3 (37), pp. 145–151

4. Kostrikin A. I. *Vvedenie v algebra* [Introduction to Algebra]. Moscow: MTsNMO; 2018, 272 p.

5. Chzhan V. *Optimizirovannie algoritmi dlya kodov s nizkoi plotnostyu proverok na chetnost i ikh primenenie v sistemakh svyazi* [Optimized Algorithms for Low-Density Parity-Check Codes and Their Application to Communication Systems]. Tomsk: Tomskii gosudarstvennii universitet sistem upravleniya i radioelektroniki; 2025, 135 p.

6. Bouchaib A., Noun S, Belkasmi M, Zouaki H. Good Quasi-Cyclic Codes from Circulant Matrices Concatenation using a Heuristic Method. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications.* 2016, vol. 7, no. 9.

7. Balonin Yu. N., Yegorova I. S., Sergeev A. M. *Negatsiklicheskie matritsi i filtri Mersenna* [Negacyclic Matrices and Mersenne Filters]. Saint Petersburg: Sankt-Peterburgskii gosudarstvennii universitet aerokosmicheskogo priborostroeniya; 2019, pp. 11.

8. Harmuth H. F. Applications of Walsh Functions in Communications. *IEEE Spectrum*. 1969, no. 6, pp. 82–91.

9. Rademacher H. Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen. *Math. Ann.* 1922, vol. 87, no. 1–2, pp. 112–138.

10. Zhong X., Sham C.-W., Ma S. L., Chou H.-F., Mostaani A., Vu T. X., Chatzinotas S. Joint source-channel coding system for 6G communication: Design, prototype and future directions. *IEEE Access*. 2024.

11. Prokopenko N. Yu. *Diskretnaya matematika* [Discrete Mathematics]. Nizhny Novgorod: Nizhnegorodskii gosudarstvennii arkhitekturno-stroitelnii universitet, 2016, 251 p.

12. Pollock D. S. *Circulant matrices and time-series analysis.* Queen Mary, University of London; 2001, 20 p.

13. Davis P. J. *Circulant Matrices*. New York: John Wiley and Sons, 1979.

14. Muir T. The Theory of Circulants in the Historical Order of Development up to 1860. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*. 1906, vol. 26, pp. 390-398.

15. Muir T. The Theory of Circulants from 1861 to 1880. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh.* 1911, vol. 32, pp. 136–149.

16. Morrison K. E. *Generalization of Circulant Matrices for Non-Abelian Groups*. Department of Mathematics California Polytech-nic State University San Luis Obispo, CA 93407.

17. Stroinikova E. D. *Optimizatsiya tsifrovoi obrabotki signalov s ispolzovaniem strukturnikh algoritmov dlya matrits nekotorikh kodov Yakob*i [Optimization of Digital Signal Processing Using Structural Algorithms for Matrices of Some Jacobi Codes]. Minsk: Belorusskii gosudarstvennii universitet informatiki i radioelektroniki P. Brovki; 2006.

18. Volchkov V. P., Poborchaya N. Ye. Predstavlenie sluchainikh protsessov vektornoi rekurrentnoi tsirkulyantnoi mode-lyu vtorogo poryadka [Representation of random processes by a second-order vector recurrent circulant model]. *Zhurnal radioelektroniki (elektronnii zhurnal IRE RAN)* [Journal of Radio Electronics (Electronic Journal of IRE RAS)]. 2013, no. 12. Available at: http://jre.cplire.ru/jre/dec13/14/text.pdf.

19. Volchkov V. P., Poborchaya N. Ye., Shloma A. M. Approksimatsiya, filtratsiya i sglazhivanie sluchainikh signalov s pomoshchyu rekurrentnikh tsirkulyantnikh modelei skolzyashchego okna [Approximation, filtering and smoothing of random signals using recurrent circulant sliding window models]. *Nauchnie vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. Istoriya. Politologiya. Ekonomika. Informatika* [Scientific Bulletin of Belgorod State University. Series: History. Political Science. Economics. Computer Science]. 2013, vol. 28/1, no. 22 (165), pp. 135–143.

Ссылка для цитирования:
Яксубаев К. Д., Аксютина И. В. Уравнение Кардано – Тарталья и матрицы-циркулянты // Инженерно-строительный вестник Прикаспия : научно-технический журнал / Астраханский государственный архитектурно-строительный университет. Астрахань : ГБОУ АО ВО «АГАСУ», 2026. № 1 (55). С. 100–104.

УДК 004.9 (075.8)
DOI 10.52684/2312-3702-2026-55-1-104-111

ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНАЯ СИСТЕМА ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ МАШИННЫМИ НОСИТЕЛЯМИ ИНФОРМАЦИИ НА ОСНОВЕ ЧЕЛОВЕКО-МАШИННОГО КОЛЛЕКТИВНОГО ИНТЕЛЛЕКТА

О. В. Кудрявцева, Е. М. Бялецкая, М. А. Кудрявцева

Кудрявцева Ольга Витальевна, старший преподаватель кафедры экономики строительства, Астраханский государственный архитектурно-строительный университет; аспирант, Астраханский государственный технический университет, г. Астрахань, Российская Федерация; e-mail: kudryavtzevaov@mail.ru;

Бялецкая Елена Михайловна, кандидат технических наук, доцент кафедры «Информатика, математика и общегуманитарные науки», Новороссийский филиал Финансового университета при Правительстве Российской Федерации, г. Новороссийск, Российская Федерация;

Кудрявцева Мария Алексеевна, студент, Астраханский государственный архитектурно-строительный университет, г. Астрахань, Российская Федерация

В условиях цифровой трансформации организациям необходимо эффективно управлять данными. Традиционные системы учета не справляются со сложными задачами, требующими экспертной оценки. Данное исследование предлагает интеллектуальную систему поддержки принятия решений, объединяющую надежность PostgreSQL, гибкость Python и возможности коллективного интеллекта человека и машины. В статье представлена концепция и архитектура системы автоматизированного учета машинных носителей информации. Описаны математическая модель, реляционная схема базы данных и алгоритмы взаимодействия компонентов. Реализация на Python с использованием psycopg2 обеспечивает эффективную и безопасную работу с СУБД. Система предназначена для автоматизации учета и организации совместной работы экспертов и программных агентов при решении задач информационной безопасности и оптимизации ресурсов. Разработанная система является масштабируемой и может быть адаптирована для организаций различного профиля.

Ключевые слова: *система поддержки принятия решений, человеко-машинный коллективный интеллект, управление машинными носителями информации, PostgreSQL, Python, реляционная база данных, краудсорсинг, самоорганизация.*

AN INTELLIGENT DECISION SUPPORT SYSTEM FOR MANAGING MACHINE-BASED INFORMATION CARRIERS BASED ON HUMAN-MACHINE COLLECTIVE INTELLIGENCE

O. V. Kudryavtseva, Ye. M. Byaletskaya, M. A. Kudryavtseva

Kudryavtseva Olga Vitalyevna, Senior Lecturer of Construction Economics Department, Astrakhan State University of Architecture and Civil Engineering; post-graduate student, Astrakhan State Technical University, Astrakhan, Russian Federation; e-mail: kudryavtzevaov@mail.ru;

Byaletskaya Yelena Mikhaylovna, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of Computer Science, Mathematics, and General Humanities Department, Novorossiysk Branch of the Financial University under the Government of the Russian Federation, Novorossiysk, Russian Federation;

Kudryavtseva Mariya Alekseyevna, student, Astrakhan State University of Architecture and Civil Engineering, Astrakhan, Russian Federation

In the context of digital transformation, organizations need to manage their data effectively. Traditional accounting systems are not equipped to handle complex tasks that require expert evaluation. This research proposes an intelligent decision support system that combines the reliability of PostgreSQL, the flexibility of Python, and the capabilities of human-machine collective intelligence. The article presents the concept and architecture of an automated accounting system for machine-readable media. It describes a mathematical model, a relational database schema, and algorithms for component interaction. The implementation in Python using psycopg2 ensures efficient and secure operation with the database management system. The system is designed