

9. Kaprielov S.S., Goldenberg A.L. Svoystva vysokoprochnogo betona, podvergnutogo periodicheskomu vozdeystviyu temperatury [Properties of high-strength concrete subjected to periodic temperature exposure]. *Stroitel'nye materialy* [Construction materials]. 2013. No. 3. Pp. 60-66.
10. Loginova S.A., Voronov I.A. Issledovanie ustojchivosti nanomodifitsirovannogo betona k korrozii v usloviyah povyshennoj biologicheskoy aktivnosti [Study of the resistance of nanomodified concrete to corrosion under conditions of increased biological activity]. *Inzhenerno-stroitel'nyy vestnik Prikaspiya* [Engineering and Construction Bulletin of the Caspian Region]. 2025. No. 4 (54). Pp. 35-39. DOI: 10.52684/2312-3702-2025-54-4-35-39
11. Makarov A.V., Ivasik D.V., Vasilchenko A.A. Vlagozashchita zhelezobetonnykh mostov - vazhnyy faktor ih dolgovechnosti [Moisture protection of reinforced concrete bridges is an important factor in their durability]. *Inzhenerno-stroitel'nyy vestnik Prikaspiya* [Engineering and Construction Bulletin of the Caspian Region]. 2025. No. 4 (54). Pp.12-17. DOI: 10.52684/2312-3702-2025-54-4-12-17
12. Malyuk V.V. Konceptiya dolgovechnosti betona dlya prognoza sroka sluzhby konstruktsiy v usloviyah moroznogo vozdeystviya [The concept of concrete durability for predicting the service life of structures under frost exposure]. *Vestnik Inzhenernoj shkoly Dal'nevostochnogo federal'nogo universiteta* [Bulletin of the Engineering School of the Far Eastern Federal University]. 2020. No. 4 (45). Pp. 105-115. DOI: 10.24866/2227-6858/2020-4-11
13. Morgun A.N. Morozostojkost' betona, sposoby ee povysheniya [Frost resistance of concrete, methods of its improvement]. *Nauka, tekhnika i obrazovanie* [Science, technology and education]. 2015. No. 7 (13). Pp. 101-105.
14. Pantilenko V.N., Oglotkin V.A. Morozostojkost' betonov s dobavleniem penopolistirola [Frost resistance of concrete with the addition of expanded polystyrene]. *Resursy Evropejskogo Severa. Tekhnologii i ekonomika osvoeniya* [Resources of the European North. Technologies and economics of development]. 2017. No. 2 (08). Pp. 57-72.
15. Pinus, B.I. Analiz veroyatnykh posledstviy moroznoj destrukcii cementnykh kompozitov [Analysis of the probable consequences of frost destruction of cement composites]. *Izvestiya vuzov. Investicii. Stroitel'stvo. Nedvizhimost'* [News of universities. Investments. Construction. Real estate]. 2023. Vol. 13. No. 3 (46). Pp. 538-544. DOI: 10.21285/2227-2917-2023-3-538-544
16. Pinus B.I. Prognozirovaniye zhiznennogo tsikla zhelezobetonnykh konstruktsiy v surovyykh klimaticheskikh usloviyakh [Forecasting the life cycle of reinforced concrete structures in harsh climatic conditions]. *Izvestiya vuzov. Investicii. Stroitel'stvo. Nedvizhimost'* [News of universities. Investments. Construction. Real estate]. 2024. Vol. 14. No. 2 (49). Pp. 340-347. DOI: 10.21285/2227-2917-2024-2-340-347
17. Falikman V.R., Stepanova V.F., Chekhniy G.V. O normirovaniy morozostojkosti betona v zarubezhnoj i otechestvennoj praktike [On the standardization of frost resistance of concrete in foreign and domestic practice]. *Beton i zhelezobeton* [Concrete and reinforced concrete]. 2021. No. 1 (603). Pp. 8-15.
18. Chernyshov, E.M. Moroznaya destruktsiya betonov. CHast' 1. Mekhanizm, kriterial'nye usloviya upravleniya [Frost destruction of concrete. Part 1. Mechanism, control criteria]. *Stroitel'nye materialy* [Construction materials]. 2017. No. 9. Pp. 40-46.
19. Chugunova A.S., Vasiliev A.A. Issledovanie izmeneniya karbonizatsii po secheniyu betona s uchedom vliyaniya moroznoj destrukcii [Study of changes in carbonation across a concrete cross-section taking into account the influence of frost destruction]. *Vestnik Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta transporta: nauka i transport* [Bulletin of the Belarusian State University of Transport: Science and Transport]. 2020. No. 2 (41). Pp. 105-107.
20. Shevtsov E.I., Petrunovsky D.V. Primeneniye mineral'nykh dobavok v betonah i ih vliyanie na korroziionnuyu stojkost' [Use of mineral additives in concrete and their influence on corrosion resistance]. *Inzhenernyy vestnik Dona* [Engineering Bulletin of the Don]. 2026. No. 2 (134). Pp.38-44.
21. Ho V.Ha., Ngo V.M., Vu V.T. Bond strength of a steel bar in concrete reinforcing with shape memory alloy fibers. *Science Journal of Transportation*. 2024. No. 3(19). Pp. 44-57
22. Rimshin V.I., Truntov P.S. Strengthening of reinforced concrete structures by composite materials taking into consideration the carbonization of concrete / V.I. Rimshin., *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2023. No. 2(19). Pp. 178-185. DOI: 10.22363/1815-5235-2023-19-2-178-185
23. Tran T.M., Nguyen T.T., Tran T.T. Effect of concrete damage on carbonation penetration in reinforced concrete structures. *Science Journal of Transportation*. 2024. No. 4 (20). Pp. 3-9.

© С. А. Логинова, Е. А. Корсакова, А. Д. Нерубенко

Ссылка для цитирования:

Логинова С. А., Корсакова Е. А., Нерубенко А. Д. Влияние морозной деструкции и природного увлажнения на карбонизацию бетона // Инженерно-строительный вестник Прикаспия: научно-технический журнал / Астраханский государственный архитектурно-строительный университет. Астрахань : ГБОУ АО ВО «АГАСУ», 2026. № 2 (56). С. 38–43.

УДК 624.04

DOI 10.52684/2312-3702-2026-56-2-43-49

**МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА КОМПЕНСИРУЮЩИХ НАГРУЗОК
ПРИМЕНИТЕЛЬНО К КОНСТРУКТИВНО-НЕЛИНЕЙНЫМ ЗАДАЧАМ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ**

О. В. Душко, М. И. Бочков, Е. А. Максютова

Душко Олег Викторович, доктор технических наук, заведующий кафедрой «Строительная механика», Волгоградский государственный технический университет, г. Волгоград, Российская Федерация, тел.: + 7 (8442) 97-48-72; e-mail: dushko@vgasu.ru;

Бочков Максим Иванович, кандидат технических наук, доцент кафедры «Строительная механика», Волгоградский государственный технический университет, г. Волгоград, Российская Федерация, тел.: + 7 (8442) 96-99-17; e-mail: bochkovmi@vgasu.ru;



Максютова Евгения Александровна, инженер кафедры «Строительная механика», Волгоградский государственный технический университет, г. Волгоград, Российская Федерация, тел.: + 7 (8442) 96-99-17; e-mail: evgenm00@mail.ru

В статье приводится разработанный ранее в работах авторов метод решения конструктивно-нелинейных задач строительной механики – метод, сочетающий преимущества метода компенсирующих нагрузок и метода конечных элементов в форме классического смешанного метода. Разработанный авторами метод уже показал свою эффективность, применительно к обозначенному кругу задач, в том числе, и на реальных расчетных примерах. В статье приводится развитие идей предлагаемого метода – анализ его применимости к решению задач с более сложным законом работы, который, в свою очередь, будет точнее описывать поведение реальных конструкций. За основу для корректного моделирования работы конструктивно-нелинейной связи принят график работы сваи в грунте. Предлагаемый в статье модифицированный алгоритм верифицирован с помощью известной задачи расчета балки на упрочняющихся упругоподатливых опорах.

Ключевые слова: строительная механика, метод конечных элементов в смешанной форме, численные методы, конструктивная нелинейность, сваи, основания и фундаменты.

MODIFICATIONS OF THE COMPENSATING LOAD METHOD FOR STRUCTURALLY NONLINEAR PROBLEMS OF STRUCTURAL MECHANICS

O. V. Dushko, M. I. Bochkov, Ye. A. Maksyutova

Dushko Oleg Viktorovich, Doctor of Technical Sciences, Head of "Construction Mechanics" Department, Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation, phone: + 7 (8442) 97-48-72; e-mail: dushko@vgsu.ru;

Bochkov Maksim Ivanovich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of "Construction Mechanics" Department, Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation, phone: + 7 (8442) 96-99-17; e-mail: maxim.bochkow@yandex.ru;

Maksyutova Yevgeniya Aleksandrovna, Engineer of "Construction Mechanics" Department, Volgograd State Technical University, Volgograd, Russian Federation, phone: + 7 (8442) 96-99-17; e-mail: evgenm00@mail.ru

This article presents a method developed earlier by the authors for solving structurally nonlinear problems of structural mechanics – a method that combines the advantages of the compensating load method and the finite element method in the form of the classical mixed method. The method developed by the authors has already demonstrated its effectiveness for the specified class of problems, including in practical computational examples. This article presents a further development of the ideas underlying the proposed method – an analysis of its applicability to solving problems with a more complex constitutive law, which, in turn, will more accurately describe the behavior of real structures. The load-settlement curve of a pile in soil is adopted as the basis for correctly modeling the behavior of a structurally nonlinear connection. The modified algorithm proposed in this article is verified using the well-known problem of analyzing a beam on strain-hardening elastic compliant supports.

Keywords: structural mechanics, mixed finite element method, numerical methods, structural nonlinearity, piles, soil mechanics and foundations.

Введение

На сегодняшний день, проектирование строительных конструкций, с учетом их контакта с грунтовым основанием, остается сложной задачей механики деформируемого твердого тела. Сложность заключается в необходимости учета совместной работы надземной части сооружения и деформируемого массива грунта, поведение которого зачастую характеризуется нелинейностью даже при малых нагрузках. Эта нелинейность выражается в зависимости между напряжениями и деформациями грунта, а также возможной деформацией при циклических нагружениях.

В связи с ростом нагрузок на основания и фундаменты, проблема достоверного расчета систем «балка – свайное основание» приобретает особую значимость. Классические методы расчета часто не учитывают нелинейный характер деформирования грунтового основания, что приводит к завышениям коэффициентов запаса и, как следствие, к удорожанию строительства. Как отмечается в исследовании [11]: стоимость фундамента может достигать трети от общей стоимости здания, поэтому рациональное проектирование с учетом реальной работы грунта является важнейшей задачей.

Анализ современных научных трудов, посвященных рассматриваемой в статье проблеме, показал, что расчет основания с учетом его нелинейного деформирования, является актуальной темой

работы многих научных групп. Так, свой вклад в развитие методов расчета внесла работа [1], где описываются подходы к оптимизации осадок свайных фундаментов с учетом нелинейной работы основания при проектировании по двум предельным состояниям. Важным направлением, так же, остается учет неоднородности грунтовых массивов, армированных вертикальными элементами. Данную тему освещает работа [2], в которой представлена общая система уравнений, описывающая нелинейную работу вертикально армированного основания, и предложена инженерная методика суммирования осадок, основанная на линеаризации исходных зависимостей.

Свое развитие получили и численные методы анализа систем на нелинейном основании. В зарубежной литературе широко обсуждаются преимущества смешанных формулировок метода конечных элементов (МКЭ) перед классическими подходами в перемещениях. В работе А. Аууб [17] доказано, что смешанная формулировка для балок на упругом основании позволяет более точно описывать нелинейное поведение материала как самой балки, так и основания, избегая вычислительных затрат, характерных для перемещений. Этот подход был впоследствии развит для композитных балок с податливыми связями сдвига, где применен-

ние смешанной формулировки позволило преодолеть проблемы локальных деформаций и концентрации напряжений [16].

В наших предыдущих работах, уже продемонстрирована эффективность применения метода конечных элементов в смешанной формулировке по отношению к задачам подобного плана. За основу берется алгоритм расчета из работы [4] совмещающий в себе МКЭ со смешанной формой, применяемый к расчету систем с нелинейными связями. Авторами установлено, что такая комбинация позволяет достичь требуемой точности за минимальное количество итераций. Данный подход хорошо согласуется с концепцией пошагового догружения и коррекции жесткостных параметров по мере развития нелинейных деформаций.

Метод

В качестве развития вышеперечисленных исследований в данной работе предлагается разработать модификацию, приведенного в [4] алгоритма, учитывающую нелинейную работу свай фундамента, не в виде кусочно-линейной функцией «осадка – нагрузка», а в виде функции, представляющей собой полином. В отличие от традиционного подхода,

где связь между усилием и перемещением принимается линейной, в предлагаемом алгоритме реализована итерационная процедура уточнения напряженно-деформированного состояния с использованием метода компенсирующих нагрузок. Применение смешанной формулировки МКЭ позволяет одновременно получать как перемещения, так и усилия в опорных связях, что повышает информативность и точность расчета, а также позволяет избираться от промежуточных шагов расчета.

Применительно к свайным фундаментам, нелинейность работы проявляется в изменении жесткости сваи по мере роста нагрузки. Экспериментальные данные (рис. 1) показывают, что зависимость «осадка – нагрузка» для одиночной сваи имеет явно выраженный криволинейный характер, который может быть аппроксимирован полиномиальной зависимостью второй степени. Это означает, что использование линейных моделей грунта (модель Винклера с постоянным коэффициентом постели) справедливо лишь в узком диапазоне начальных нагрузок и не позволяет достоверно прогнозировать напряженно-деформированное состояние системы при нагрузках, близких к предельным.

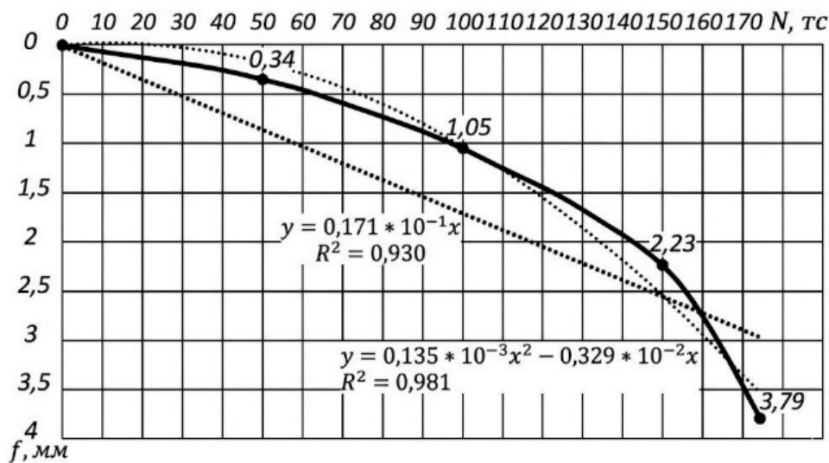


Рис. 1. График зависимости осадки сваи от нагрузки (иллюстрация авторов)
 Fig. 1. The graph depicting the dependence of pile settlement on applied load (illustration by the authors)

Учет нелинейной работы связей в рамках метода конечных элементов возможен несколькими способами. Наиболее прямолинейный подход заключается в использовании пошагово-итерационных процедур, где на каждом шаге нагружения жесткость связи корректируется в соответствии с текущим уровнем деформации. Однако такой подход требует многократного повторного формирования и решения системы уравнений, что может быть вычислительно затратным. Альтернативой является использование методов, основанных на введении компенсирующих нагрузок, сущность которых заключается в корректировке вектора узловых усилий без изменения матрицы жесткости системы.

В данной работе в качестве конечного элемента выступает стержень, работающий на изгиб (рис. 2). Разработке данного типа конечных элементов посвящены работы отечественных и зарубежных ученых [7–9].

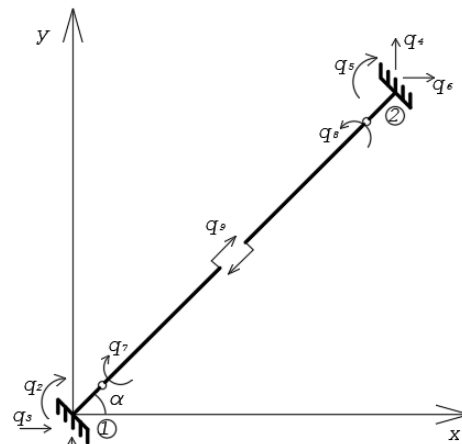


Рис. 2. Конечный элемент-стержень смешанного метода (иллюстрация авторов)
 Fig. 2. Mixed-method bar finite element (illustration by the authors)

Стержень, изображенный на рисунке 2, имеет девять неизвестных. Неизвестные переменные 1, 3, 4 и 6 являются перемещениями; усилия 2 и 5 – угловыми перемещениями, а 7 и 8 – изгибающими моментами. Последняя переменная 9 – возникающее продольное усилие.

Отличительная черта применения метода компенсирующих нагрузок для анализа конструкций с нелинейной работой заключается во введении нагрузок в направлении опоры. Эти нагрузки должны компенсировать изменчивость значений жесткости. Первоначально выполняется линейный расчет, затем рассчитывается невязка, отвечающая за изменение жесткости и вводится компенсирующая нагрузка. Снова вычисляется невязка. Условием окончания алгоритма является разница невязок на j -й и $(j + 1)$ -й итерации расчета. Это условие определяется выражением:

$$\delta_{(j+1)} = \frac{\Delta F_{(j+1)} - \Delta F_{(j)}}{\Delta F_{(j+1)}} \cdot 100\%,$$

здесь $\delta_{(j+1)}$ – критерий выхода из алгоритма; $\Delta F_{(j)}$ – величина компенсирующей нагрузки на (j) -й итерации.

В настоящей работе расчет системы производится в два этапа. На первом шаге выполняется линейный расчет с начальными модулями жесткости свай. Затем по полученным перемещениям определяется фактическое усилие в каждой свае согласно экспериментальной кривой деформирования. Разность между этим усилием и усилием, полученным в линейном расчете, образует вектор компенсирующих нагрузок, который прикладывается к системе на следующей итерации. Процесс повторяется до тех пор, пока изменение невязки между итерациями не станет меньше заданной малой величины, что свидетельствует о достижении равновесного состояния системы.

Результаты и обсуждения

В рамках тестирования алгоритма разбирается пример, представленный в [6] (рис. 3).

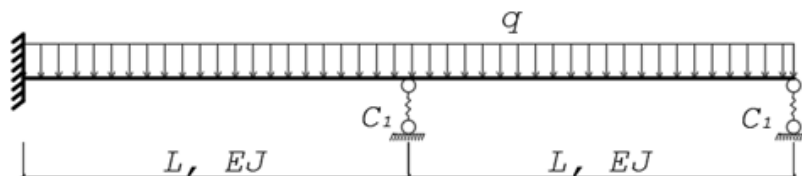


Рис. 3. Расчетная схема (иллюстрация авторов)
Fig. 3. Design model (illustration by the authors)

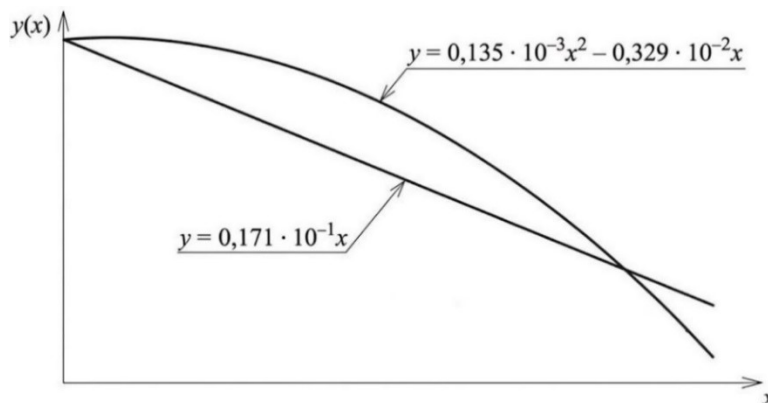


Рис. 4. График, описывающий жесткость сваи (иллюстрация авторов)
Fig. 4. Graph describing the pile stiffness (illustration by the authors)

Балка, изучаемая в данном примере имеет следующие характеристики:

$$l = 1,5 \text{ м}; EI = 0,40 \text{ ГПа} \cdot \text{см}^4; q = 1 \text{ кН/м};$$

$$c_1 = \frac{0,170628571 \text{ кН}}{\text{м}},$$

$$c_2 = 0,0013545 - 0,0328699 \text{ кН/м}.$$

В [3] представлены характеристики одностронних опор этой балки. Они характеризуются в соответствии с принятым графиком (рис. 4) следующими неравенствами:

$$R(x) = \begin{cases} 0,170628571 \cdot x \\ 0,0013545 \cdot x^2 - 0,0328699 \cdot x \end{cases}$$

Основная система представлена на рисунке 5.

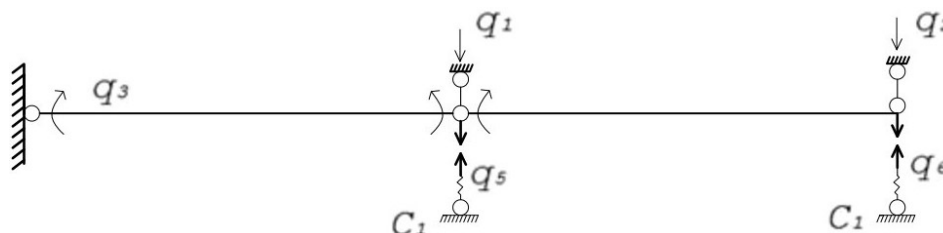


Рис. 5. Основная система с конечными элементами второго типа (иллюстрация авторов)
Fig. 5. Primary system with finite elements of the second type (illustration by the authors)



Таким образом, система разрешающих конечно-элементных уравнений будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} -\frac{1}{L1} \cdot q3 + \frac{2}{L2} \cdot q4 - q5 = q \cdot L \\ -\frac{1}{L1} \cdot q4 - q6 = \frac{q \cdot L1}{2} \\ \frac{1}{L1} \cdot q1 + \frac{L1}{3 \cdot EJ} \cdot q3 + \frac{L1}{6 \cdot EJ} \cdot q4 = -\frac{q \cdot L1^3}{24 \cdot EJ} \\ -\frac{2}{L1} + \frac{1}{L1} \cdot q2 + \frac{L1}{6 \cdot EJ} \cdot q3 + \frac{2 \cdot L1}{3 \cdot EJ} \cdot q4 = -\frac{q \cdot L1^3}{24 \cdot EJ} \\ q1 + \frac{1}{C1} \cdot q5 = 0 \\ q2 + \frac{1}{C1} \cdot q6 = 0 \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, были получены следующие значения:

$$\begin{pmatrix} q1 \\ q2 \\ q3 \\ q4 \\ q5 \\ q6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,16378 \\ 4,80331 \\ -1,4874 \\ 0,10437 \\ -0,3692 \\ -0,8195 \end{pmatrix}$$

Полученные значения величин $q1$ $q2$, описывают перемещения опор и демонстрируют необходимость применения алгоритма компенсирующих нагрузок для учета нелинейного поведения опор. После вычисления параметр компенсирующей нагрузки и прикладывается по направлению опор.

$$P1 = 0,170628571 \cdot q1 - (0,0013546 \cdot q1^2 - 0,0328699 \cdot q1) = 0,433984185;$$

$$P2 = 0,170628571 \cdot q2 - (0,0013546 \cdot q2^2 - 0,0328699 \cdot q2) = 0,9462149.$$

После введения компенсирующих нагрузок производится расчет для второй итерации.

Для новых полученных результатов продолжается расчет компенсирующей нагрузки, до тех пор пока не будет достигнута величина расхождений 0,5 %, определяемая выражением:

$$\delta1 = \frac{P1^{(3)} - P1^{(2)}}{P1^{(3)}} \cdot 100 \% = 41,2 \%;$$

$$\delta2 = \frac{P2^{(3)} - P2^{(2)}}{P2^{(3)}} \cdot 100 \% = 47,5 \%.$$

Для наглядности все итерационные вычисления представлены в таблице 1.

Таблица

Значения невязок на каждом этапе итерационного расчета

№ п/п	P1, кН	δ1, %	P2, кН	δ2, %
	1	2	3	4
1	0,433984185	0	0,9462149	0
2	0,738065148	41,19	1,8017142	47,48
3	0,992204829	25,61	2,5068089	28,13
4	1,198677209	17,23	3,0545446	17,93
5	1,358333832	11,75	3,4604073	11,72
6	1,476446578	7,99	3,7502145	7,72
7	1,560774302	5,40	3,9515001	5,09
8	1,61937702	3,61	4,08855	3,35
9	1,65930885	2,41	4,1805798	2,20
10	1,686142996	1,59	4,2417979	1,44
11	1,704003657	1,05	4,2822626	0,94
12	1,715814725	0,68	4,308897	0,61
13	1,723591405	0,45	4,3263793	0,40

Заключение

При решении поставленной задачи применение модифицированного метода компенсирующих нагрузок показало хорошие результаты. Уточнение разработанного в предыдущих работах авторов алгоритма, состоит в том, что зависимость «осадка – воспринимаемая нагрузка» моделируется не в виде кусочно-линейной функции, а в виде полинома второй степени. Применение такой зависимости точнее описывает фактические деформации, взятые из экспериментальных данных полевых испытаний грунтов сваями.

Преобразованный алгоритм, рассматриваемый в данной работе, объединяет в себе не только преимущества метода конечных элементов в классической смешанной форме, но и преимущества итерационного расчета с помощью метода компенсирующих нагрузок, поправляющего возникающие в свае усилия за счет введения компенсирующих нагрузок. Выполняя расчет по такому алгоритму, можно избежать перекомпоновки матрицы откликов в процессе уточ-

нения НДС системы. Все это оптимизирует вычислительные процессы без какого-либо ущерба для точности результатов.

Расчитывая балку на нелинейно-податливых опорах по предложенному алгоритму, была установлена хорошая сходимость итерационного процесса. Разница невязок между итерациями постепенно снижалась и достигла 0,5 %, что говорит о равновесном состоянии конструкции. Результаты расчета, полученные из рассматриваемого примера, гармонируют с работами и выводами других исследователей и позволяют сделать вывод о том, что предложенный метод может быть использован для расчета систем с нелинейными связями (примером которых могут быть свайные фундаменты).

Как итог, можно сказать, что модифицированный метод компенсирующих нагрузок расширяет границы для расчета строительных конструкций с учетом нелинейной работы их элементов. И применение данного метода возможно в задачах проектирования фундаментов, для которых характерна физическая или конструктивная нелинейность.

Список литературы

1. Алексеев, С. И. Проектирование свайных фундаментов с оптимизацией выбираемой осадки / С. И. Алексеев // Научные тенденции: Вопросы точных и технических наук : сборник научных трудов по материалам XXIX международной научной конференции, Санкт-Петербург, 12 июля 2020 года. - Санкт-Петербург: Центр Научных Публикаций Международной Объединенной Академии Наук, 2020. - С. 12-18. - DOI 10.18411/sciencepublic-12-07-2020-04. - EDN KYVPHE.
2. Безволев, С. Г. Инженерная методика для расчета фундаментов в случаях применения больших групп свай / С. Г. Безволев // Механизация строительства. - 2012. - №3. - С. 37-45. - URL: <https://rucont.ru/efd/541115>.
3. Городецкий, А. С. Компьютерные модели конструкций [Текст] / Городецкий А. С., Евзеров И. Д. - Киев: Факт, 2005. - 344 с.
4. Душко О. В., Бочков М. И., Рекунов С. С., Максютова Е. А., Даудова М. Д. - Исследование эффективности метода комбинирования нагрузок в задачах расчета систем с угловыми упрочняющимися связями // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2025. Вып. 1(98). С. 145—152. DOI: 10.35211/18154360_2025_1_145.
5. Зырянов В. С., Нестерова Н. М. Численное моделирование нелинейного деформирования свайных фундаментов с учетом совместной работы с грунтовым основанием // Основания, фундаменты и механика грунтов. - 2022. - № 3. - С. 12-19.
6. Игнатъев, В. А. Нелинейная строительная механика стержневых систем. Основы теории. Примеры расчета. / В. А. Игнатъев, А. В. Игнатъев В. В. Галишников Е. В. Онищенко // Волгоград: ВолГАСУ, 2014. - 94 с.
7. Игнатъев, А. В. Развитие метода конечных элементов в форме классического смешанного метода строительной механики // Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. Волгоград - 2019 - 294 с.
8. Игнатъев, В. А. Расчет стержневых систем методом конечных элементов: учебно-методический комплекс: в 2-х ч. Ч. 1: МКЭ в задачах статики / В. А. Игнатъев А. В. Игнатъев Т. И. Апраксина Ю. Н. Бахтин // Волгоград: ВолГАСУ, 2008. - 189 с.
9. Игнатъев, В. А. Смешанная форма метода конечных элементов в задачах строительной механики: моногр. [Текст] / В. А. Игнатъев, А. В. Игнатъев; Волгогр. гос. архит.-строит. ун-т. - Волгоград, 2005. - 99 с.
10. Коновалов П. А., Коновалов В. П. Численные методы строительной механики с элементами нелинейности: монография. - М.: Издательство АСВ, 2021. - 312 с. - ISBN 978-5-4323-0387-9.
11. Прокопенко, Д. В. Методика расчета группы свай-РИТ по деформациям в нелинейно-деформируемом грунтовом основании / Д. В. Прокопенко // Вестник ГГТУ им. П. О. Сухого : научно-практический журнал. - 2021. - № 2. - С. 130-135.
12. Рекунов, С. С. Исследование вопросов надежности сооружений разных типов при экстремальных воздействиях. Ч. 1 / С. С. Рекунов, А. А. Чураков // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. - 2023. - № 2 (44). - С. 57-61. - DOI 10.52684/2312-3702-2023-44-2-57-61.
13. Рекунов, С. С. Исследование вопросов надежности сооружений разных типов при экстремальных воздействиях. Ч. 2 / С. С. Рекунов, А. А. Чураков // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. - 2023. - № 3 (45). - С. 80-84.
14. Тер-Мартirosян З. Г., Сидоров В. В., Тер-Мартirosян А. З. Нелинейные деформационные модели грунтов в расчетах оснований и фундаментов // Вестник МГСУ. - 2023. - Т. 18, № 1. - С. 8-21.
15. Улицкий В. М., Шашкин А. Г., Шашкин К. Г. Методы расчета свайных фундаментов с учетом нелинейной работы грунта: современное состояние и перспективы развития // Геотехника. - 2024. - Т. 16, № 2. - С. 34-48.
16. Andrea Dall'Asta, Alessandro Zona - Three-field mixed formulation for the non-linear analysis of composite beams with deformable shear connection; Finite Elements in Analysis and Design. - Pages 425-448, ISSN 0168-874X, [https://doi.org/10.1016/S0168-874X\(03\)00071-4](https://doi.org/10.1016/S0168-874X(03)00071-4).
17. Ashraf Ayoub - Mixed formulation of nonlinear beam on foundation elements . Pages 411-421, ISSN 0045-7949, [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(03\)00015-4](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(03)00015-4).
18. Çetindemir O., Zülfikar A. C. Numerical Validation of Fully Coupled Nonlinear Seismic Soil–Pile–Structure Interaction // Buildings. - 2024. - Vol. 14, No. 6. - P. 1502. - DOI: 10.3390/buildings14061502
19. Choi M. J., Klinkel S., Klarmann S., Sauer R. A. An objective isogeometric mixed finite element formulation for nonlinear elastodynamic beams with incompatible warping strains // Multibody System Dynamics. - 2025. - Vol. 63. - P. 615-668. - DOI: 10.1007/s11044-024-10037-x
20. Granitzer A. N., Felic H., Leo J., Stastny A., Tschuchnigg F. Numerical investigation of pile foundation systems employing an enhanced embedded finite element // Frontiers in Built Environment. - 2024. - Vol. 10. - DOI: 10.3389/fbuil.2024.1234567
21. He Y., Winkler spring coefficients for laterally loaded piles // Computers and Geotechnics. - 2024. - Vol. 170. - P. 106264. - DOI: 10.1016/j.compgeo.2024.106264.
22. Ibrahim A., Elsayw M. Ultimate Bearing Capacity of Bored Piles Determined Using Finite Element Analysis and Cubic Regression // Transportation Infrastructure Geotechnology. - 2025. - Vol. 12, Article 26. - DOI: 10.1007/s40515-024-00491-7.
23. Jin K., Jia Q. Y., Zhou X., et al. Seismic Response Analysis of Cored Mixing Pile Composite Foundation Based on a Modified Davidenkov Constitutive Model // Yangtze River. - 2025. - URL: <http://www.rmcjzz.cjw.cn/en/article/id/d918b802-cff4-4a6e-8dd3-b5a62e7512ff> (дата обращения: 16.04.2026)
24. Pereira A., Dias-de-Oliveira J. Beams on elastic foundation: A variable reduction approach for nonlinear contact problems // European Journal of Mechanics - A/Solids. - 2024. - Vol. 109. - DOI: 10.1016/j.euromechsol.2024.105463.
25. Pham T. A., Nadimi S., Sutman M. Softening-based interface model and nonlinear load-settlement response analysis of piles in saturated and unsaturated multi-layered soils // Computers and Geotechnics. - 2024. - Vol. 171. - 106331. - DOI: 10.1016/j.compgeo.2024.106331.

References

1. Alekseev S. I. Proektirovanie svaynykh fundamentov s optimizatsiyey vybiraemoy osadki [Design of pile foundations with optimization of the selected settlement]. Nauchnye tendentsii: Voprosy tochnykh i tekhnicheskikh nauk : Sbornik nauchnykh trudov po materialam XXIX mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii, g. Sankt-Peterburg, 12 iyulya 2020 goda [Scientific trends: Issues of exact and technical sciences : Collection of scientific papers based on the materials of the XXIX International Scientific Conference, Saint Petersburg, July 12, 2020]. Saint Petersburg : Tsentr Nauchnykh Publikatsiy Mezhdunarodnoy Obedinennoy Akademii Nauk; 2020, pp. 12–18. DOI: 10.18411/sciencepublic-12-07-2020-04. EDN: KYVPHE.
2. Bezvolev S. G. Inzhenernaya metodika dlya rascheta fundamentov v sluchayakh primeneniya bolshikh grupp svay [Engineering method for calculating foundations in cases of using large groups of piles]. Mekhanizatsiya stroitelstva [Construction Mechanization]. 2012, no. 3, pp. 37–45. URL: <https://rucont.ru/efd/541115>
3. Gorodetsky A. S., Evzerov I. D. Kompyuternye modeli konstruksiy [Computer models of structures]. Kiev : Fakt; 2005, 344 p.

4. Dushko O. V., Bochkov M. I., Rekunov S. S., Maksyutova E. A., Daudova M. D. Issledovanie effektivnosti metoda kompensiruyushchikh nagruzok v zadachakh rascheta sistem s uglovymi uprochnyayushchimisya svyazyami [Investigation of the effectiveness of the compensating load method in problems of calculating systems with angular hardening connections]. Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo arkhitekturno-stroitel'nogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arkhitektura [Bulletin of Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering. Series: Construction and Architecture]. 2025, issue 1(98), pp. 145–152. DOI: 10.35211/18154360_2025_1_145
5. Zyryanov V. S., Nesterova N. M. Chislennoe modelirovaniye nelineynogo deformirovaniya svaynykh fundamentov s uchetom sovmestnoy raboty s gruntovym osnovaniem [Numerical simulation of nonlinear deformation of pile foundations taking into account interaction with the soil base]. Osnovaniya, fundamenty i mekhanika gruntov [Soil Mechanics and Foundation Engineering]. 2022, no. 3, pp. 12–19.
6. Ignatyev V. A., Ignatyev A. V., Galishnikova V. V., Onishchenko E. V. Nelineynaya stroitel'naya mekhanika sterzhnevnykh sistem. Osnovy teorii. Primery rascheta [Nonlinear structural mechanics of rod systems. Fundamentals of theory. Calculation examples]. Volgograd : VolgASU; 2014, 94 p.
7. Ignatyev A. V. Razvitiye metoda konechnykh elementov v forme klassicheskogo smeshannogo metoda stroitel'noy mekhaniki [Development of the finite element method in the form of the classical mixed method of structural mechanics]. Dissertation for the degree of Doctor of Technical Sciences. Volgograd; 2019, 294 p.
8. Ignatyev V. A., Ignatyev A. V., Apraksina T. I., Bakhtin Yu. N. Raschet sterzhnevnykh sistem metodom konechnykh elementov: uchebno-metodicheskiy kompleks: v 2-kh ch. Ch. 1: MKÉ v zadachakh statiki [Calculation of rod systems by the finite element method: educational and methodological complex: in 2 parts. Part 1: FEM in statics problems]. Volgograd : VolgASU; 2008, 189 p.
9. Ignatyev V. A., Ignatyev A. V. Smeshannaya forma metoda konechnykh elementov v zadachakh stroitel'noy mekhaniki [Mixed form of the finite element method in problems of structural mechanics]. Volgograd : Volgograd State University of Architecture and Civil Engineering; 2005, 99 p.
10. Konovalov P. A., Konovalov V. P. Chislennyye metody stroitel'noy mekhaniki s elementami nelineynosti [Numerical methods of structural mechanics with nonlinearity elements]. Moscow : ASV Publishing House; 2021, 312 p. ISBN 978-5-4323-0387-9.
11. Prokopenko D. V. Metodika rascheta gruppy svay-RIT po deformatsiyam v nelineyno-deformiruemom gruntovom osnovanii [Method for calculating a group of RIT piles based on deformations in a nonlinearly deformable soil base]. Vestnik GGTU im. P. O. Sukhogo : nauchno-prakticheskiy zhurnal [Bulletin of Sukhoi State Technical University : scientific and practical journal]. 2021, no. 2, pp. 130–135.
12. Rekunov S. S., Churakov A. A. Issledovanie voprosov nadezhnosti sooruzheniy raznykh tipov pri ekstremalnykh vozdeystviyakh. Ch. 1 [Study of reliability issues of different types of structures under extreme impacts. Part 1]. Inzhenerno-stroitel'nyy vestnik Prikaspiya [Engineering and Construction Bulletin of the Caspian Region]. 2023, no. 2 (44), pp. 57–61. DOI: 10.52684/2312-3702-2023-44-2-57-61
13. Rekunov S. S., Churakov A. A. Issledovanie voprosov nadezhnosti sooruzheniy raznykh tipov pri ekstremalnykh vozdeystviyakh. Ch. 2 [Study of reliability issues of different types of structures under extreme impacts. Part 2]. Inzhenerno-stroitel'nyy vestnik Prikaspiya [Engineering and Construction Bulletin of the Caspian Region]. 2023, no. 3 (45), pp. 80–84.
14. Ter-Martirosyan Z. G., Sidorov V. V., Ter-Martirosyan A. Z. Nelineynyye deformatsionnyye modeli gruntov v raschetakh osnovaniy i fundamentov [Nonlinear deformation models of soils in calculations of bases and foundations]. Vestnik MGSU [Bulletin of Moscow State University of Civil Engineering]. 2023, vol. 18, no. 1, pp. 8–21.
15. Ulickij V. M., Shashkin A. G., Shashkin K. G. Metody rascheta svaynykh fundamentov s uchetom nelineynoy raboty grunta: sovremennoe sostoyaniye i perspektivy razvitiya [Methods for calculating pile foundations taking into account nonlinear soil behavior: current state and development prospects]. Geotekhnika [Geotechnics]. 2024, vol. 16, no. 2, pp. 34–48.
16. Andrea Dall'Asta, Alessandro Zona. Three-field mixed formulation for the non-linear analysis of composite beams with deformable shear connection; Finite Elements in Analysis and Design. Pages 425–448, ISSN 0168-874X. DOI: 10.1016/S0168-874X(03)00071-4
17. Ashraf Ayoub. Mixed formulation of nonlinear beam on foundation elements. Pages 411–421, ISSN 0045-7949. DOI: 10.1016/S0045-7949(03)00015-4
18. Çetindemir O., Zülfiyar A. C. Numerical validation of fully coupled nonlinear seismic soil–pile–structure interaction. Buildings. 2024, vol. 14, no. 6, p. 1502. DOI: 10.3390/buildings14061502
19. Choi M. J., Klinkel S., Klarmann S., Sauer R. A. An objective isogeometric mixed finite element formulation for nonlinear elastodynamic beams with incompatible warping strains. Multibody System Dynamics. 2025, vol. 63, pp. 615–668. DOI: 10.1007/s11044-024-10037-x
20. Granitzer A. N., Felic H., Leo J., Stastny A., Tschuchnigg F. Numerical investigation of pile foundation systems employing an enhanced embedded finite element. Frontiers in Built Environment. 2024, vol. 10. DOI: 10.3389/fbuil.2024.1234567
21. He Y. Winkler spring coefficients for laterally loaded piles. Computers and Geotechnics. 2024, vol. 170, p. 106264. DOI: 10.1016/j.compgeo.2024.106264
22. Ibrahim A., Elsayw M. Ultimate bearing capacity of bored piles determined using finite element analysis and cubic regression. Transportation Infrastructure Geotechnology. 2025, vol. 12, Article 26. DOI: 10.1007/s40515-024-00491-7.
23. Jin K., Jia Q. Y., Zhou X., et al. Seismic response analysis of cored mixing pile composite foundation based on a modified Davidenkov constitutive model. Yangtze River. 2025. URL: <http://www.rmcjzz.cjw.cn/en/article/id/d918b802-cff4-4a6e-8dd3-b5a62e7512ff> (accessed: 16.04.2026)
24. Pereira A., Dias-de-Oliveira J. Beams on elastic foundation: A variable reduction approach for nonlinear contact problems. European Journal of Mechanics - A/Solids. 2024, vol. 109. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2024.105463
25. Pham T. A., Nadimi S., Sutman M. Softening-based interface model and nonlinear load-settlement response analysis of piles in saturated and unsaturated multi-layered soils. Computers and Geotechnics. 2024, vol. 171, 106331. DOI: 10.1016/j.compgeo.2024.106331

© О. В. Душко, М. И. Бочков, Е. А. Максютова

Ссылка для цитирования:

Душко О. В., Бочков М. И., Максютова Е. А. Модификации метода компенсирующих нагрузок применительно к конструктивно-нелинейным задачам строительной механики // Инженерно-строительный вестник Прикаспия: научно-технический журнал / Астраханский гос. архит.-строит. университет. Астрахань: ГАОУ АО ВО «АГАСУ», 2026. № 2 (56). С. 43–49.