

9. Bairamukov S. H., Dolaeva Z. N. Dynamic programming in optimization of comprehensive housing stock modernization. *Magazine of Civil Engineering*. 2017, no. 8 (76), pp. 3–19.
10. Lapidus A. A., Tuskaeva Z. R., Sokolova Ye. I. Optimizatsiya protsessov ispolzovaniya stroitelnoi tekhniki s prime-neniem metodov lineinogo programmirovaniya [Optimization of construction equipment usage processes using linear programming methods]. *Stroitelnoe proizvodstvo* [Construction Production]. 2024, no. 1, pp. 85–91.
11. Rajwar K., Deep K., Das S. An exhaustive review of the metaheuristic algorithms for search and optimization: tax-onomy, applications, and open challenges. *Artif. Intell. Rev.* 2023, no. 56, pp. 13187–13257. <https://doi.org/10.1007/s10462-023-10470-y>.
12. Kremer O. B., Podvalnii S. L. Programmaya realizatsiya resheniya optimizatsionnikh zadach metodom geneticheskogo algoritma [Software implementation of solving optimization problems by the genetic algorithm method]. *Vestnik Voro-nezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of Voronezh State Technical University]. 2012, no. 3, pp. 21–24.
13. Mishchenko V. Ya., Emelyanov D. I., Tikhonenko A. A. Obosnovanie tselesoobraznosti ispolzovaniya geneticheskikh algoritmov pri optimizatsii raspredeleniya resursov v kalendarnom planirovanii stroitelstva [Justification of the feasi-bility of using genetic algorithms to optimize resource allocation in construction schedule planning]. *Promishlennoye i grazhdanskoye stroitelstvo* [Industrial and Civil Construction]. 2013, no. 10, pp. 71–73.
14. Dullinger C., Struckl W., Kozek M. A general approach for mixed-integer predictive control of HVAC systems using MILP. *Appl. Therm. Eng.* 2018, no. 128, pp. 1646–1659. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2017.09.104>.
15. Junghans L., Darde N. Hybrid single objective genetic algorithm coupled with the simulated annealing optimization method for building optimization. *Energy and Buildings*. 2015, no. 86, pp. 651–662. <https://doi.org/10.1016/j.enbuild.2014.10.039>.
16. Liu S.-S., Wang C.-J. Optimizing project selection and scheduling problems with time-dependent resource con-straints. *Automation in Construction*. 2011. vol. 206, no. 8, pp. 1110–1119.
17. Xie L., Shan K., Wang S. A generic framework and strategies for integrating AI into building automation systems for field-level optimization of HVAC systems. *Energy*. 2025, no. 333, pp. 137405. <https://doi.org/10.1016/j.en-ergy.2025.137405>.
18. Zhang H., Thilker C. A., Xiao F., Madsen H., Li R., Ma T., et al. Stochastic occupancy-integrated MPC for multi-objective optimal built environment control. *Build Simul.* 2025, no.18, pp. 1963–1999. <https://doi.org/10.1007/s12273-025-1300-4>.
19. Rauf M., Mumtaz Ja. Energy-efficient multi-objective scheduling for modern construction projects with dynamic resource constraints. *Buildings*. 2026, no. 2, pp. 392.
20. Vorobev V. S., Kvint M. Yu. Matematicheskaya model optimizatsii i upravleniya zatratami stroitel'nogo proizvodstva [Mathematical model for optimization and cost management of construction production]. *Vestnik Sibirskogo gosudarstvennogo universiteta putei soobshcheniya* [Bulletin of Siberian Transport University]. 2007, no. 17, pp. 26–30.
21. Sheina S. G., Balashev R. V., Zhivoglyadov G. A., Shakhiev R. D. Ustoychivoye stroitelstvo zdaniy [Sustainable con-struction of buildings]. *Inzhenernii vestnik Dona* [Engineering Journal of Don]. 2023, no. 12. Available at: <https://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n12y2023/8911> (in Russ.)
22. Wang X., Dong B. Long-term experimental evaluation and comparison of advanced controls for HVAC systems. *Appl. Energy*. 2024, no. 371, pp. 123706. <https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2024.123706>.
23. Luo, Z., Peng, J., Hu, M., et al Multi-objective optimal dispatch of household flexible loads based on their real-life operating characteristics and energy-related occupant behavior. *Build. Simul.* 2023, no. 16, pp. 2005–2025. <https://doi.org/10.1007/s12273-023-1036-y>

© С. Х. Байрамуков, З. Н. Долаева

Ссылка для цитирования:

Байрамуков С. Х., Долаева З. Н. Концепция многоцелевой оптимизации управления строительным производством // Инженерно-строительный вестник Прикаспия : научно-технический журнал / Астраханский государственный архи-тектурно-строительный университет. Астрахань : ГАОУ АО ВО «АГАСУ», 2026. № 3 (57). С. 92–98.

УДК 519.852:519.876.5:004.94

DOI 10.52684/2312-3702-2026-57-3-98-106

**МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ОПТИМИЗАЦИИ
В ЗАДАЧАХ ЦИФРОВОЙ ЭКОНОМИКИ: ОТ ЛОГИСТИКИ ДО УПРАВЛЕНИЯ ПОРТФЕЛЕМ**

П. М. Элькин, Е. А. Джалмухамбетова, М. В. Карташов

Элькин Павел Михайлович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Техни-ческая физика и информационные технологии», Энгельсский технологический институт – филиал Саратовского государственного технического университета имени Ю. А. Гагарина, г. Энгельс, Российская Федерация; e-mail: pashaelkin@yandex.ru;

Джалмухамбетова Елена Азатуллаевна, кандидат физико-математических наук, заведую-щая кафедрой «Математические и естественно-научные дисциплины», Каспийский институт мор-ского и речного транспорта им. ген.-адм. Ф. М. Апраксина – филиал Волжского государственного университета водного транспорта, г. Астрахань, Российская Федерация; e-mail: elena_jalm@mail.ru;

Карташов Максим Вячеславович, доцент кафедры «Экономика и управление на водном транспорте», Каспийский институт морского и речного транспорта им. ген.-адм. Ф. М. Апраксина – филиал Волжского государственного университета водного транспорта, г. Астрахань, Российская Федерация; e-mail: elena_jalm@mail.ru

В статье проведен сравнительный анализ методов оптимизации для задач транспортной логистики и управления инвестиционным портфелем в цифровой экономике. Исследована деградация классических детерминированных моделей при обработке нестационарных потоков Big Data. Дано формализованное описание прямых и обратных задач оптимизации в условиях стохастичности ограничений и невыпуклости целевой функции. Представлены модифицированные формализации динамической задачи маршрутизации (VRP) и модели управления запасами (EOQ) с нейросетевым LSTM-оператором. Для портфельного управления проанализированы модель Марковица, минимизация хвостового риска (CVaR) и алгоритмы обучения с подкреплением (RL). Научная новизна заключается в обосновании и систематизации перехода к гибридным архитектурам ML+Opt, обеспечивающим получение квазиоптимальных решений в режиме реального времени.

Ключевые слова: математическое моделирование, численная оптимизация, цифровая экономика, логистика, VRP, EOQ, управление портфелем, CVaR, LSTM, Big Data.

MATHEMATICAL MODELING AND OPTIMIZATION METHODS IN DIGITAL ECONOMY PROBLEMS: FROM LOGISTICS TO PORTFOLIO MANAGEMENT

P. M. Elkin, Ye. A. Dzhalumukhambetova, M. V. Kartashov

Elkin Pavel Mikhaylovich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Technical Physics and Information Technologies Department, Engels Technological Institute – branch of Saratov State Technical University named after Yu. A. Gagarin, Engels, Russian Federation; e-mail: pashaelkin@yandex.ru;

Dzhalumukhambetova Yelena Azatullayevna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Head of Mathematical and Natural Science Disciplines Department, Caspian Institute of Sea and River Transport named after General Admiral F. M. Apraksin – branch of Volga State University of Water Transport, Astrakhan, Russian Federation; e-mail: elena_jalm@mail.ru;

Kartashov Maksim Vyacheslavovich, Associate Professor of Economics and Management in Water Transport Department, Caspian Institute of Sea and River Transport named after General Admiral F. M. Apraksin – branch of Volga State University of Water Transport, Astrakhan, Russian Federation; e-mail: elena_jalm@mail.ru

The paper presents a comparative analysis of optimization methods for routing logistics and investment portfolio management in the digital economy. It examines the degradation of classical deterministic models when processing non-stationary Big Data streams. A formalized description of direct and inverse optimization problems under constraint stochasticity and objective function non-convexity is provided. Formalizations of the dynamic Vehicle Routing Problem (VRP) and a modified Economic Order Quantity (EOQ) model with a neural LSTM operator are developed. For portfolio management, the Markowitz model and Conditional Value-at-Risk (CVaR) tail-risk optimization are analyzed. The novelty lies in substantiating the transition to hybrid ML+Opt architectures that deliver real-time quasi-optimal solutions.

Keywords: mathematical modeling, numerical optimization, digital economy, logistics, VRP, EOQ, portfolio optimization, CVaR, LSTM, Big Data.

Вклад авторов

Элькин П. М. – формирование идеи, математическая постановка задач оптимизации (1)–(8), разработка классификации численных методов, формулировка выводов; Джалмухамбетова Е. А. – анализ и интерпретация результатов вычислительных экспериментов, формализация моделей CVaR и Марковица, доработка математического аппарата; Карташов М. В. – сбор и систематизация данных по транспортно-логистическим системам Прикаспийского региона, анализ практической применимости моделей маршрутизации.

Введение

Цифровая трансформация экономики формирует новый класс задач крупномасштабной оптимизации, в которых вектор управляемых переменных x определяется на основе непрерывного стохастического потока данных $D(t)$. В отличие от классических детерминированных постановок [1–3], целевая функция и параметры ограничений являются динамическими процессами, определяемыми нестационарным массивом D . Описанный класс задач с высокой размерностью ($n > 10^4$) и кусочно-постоянной или ступенчатой структурой задержек характерен для двух ключевых направлений цифровой экономики: мультимодальной логистики, включая критическую инфраструктуру международного транспортного коридора «Север – Юг» и порта Оля, и высокочастотного портфельного инвестирования [6, 11].

Базовая математическая постановка прямой задачи оптимизации в цифровой среде объединяет указанные приложения в единую формальную модель поиска минимума нелинейного функционала на допустимом множестве, параметризованном входными данными:

$$\min_{x \in X(D)} f(x, D), \quad (1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор управляемых переменных (объемы грузопотоков или веса активов в портфеле); $D \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2 \times \dots \times d_k}$ – тензор цифровых данных (Big Data), сформированный путем дискретизации потока $D(t)$; $X(D) \subseteq \mathbb{R}^n$ – допустимое множество решений; $f: X(D) \times D \rightarrow \mathbb{R}$ – нелинейная, как правило, невыпуклая и негладкая целевая функция.

Сопряженная обратная задача заключается в идентификации оператора f и структуры множества $X(D)$ по наблюдаемым парам решений и данных (D_k, x_k^*) , где x_k^* – фактически принятые

решения. С точки зрения математического моделирования и численных методов требуется построение устойчивого численного алгоритма $\mathcal{A}: D \rightarrow x$, обеспечивающего сходимость $\|x_k - x^*\| \rightarrow 0$ при наличии аддитивных и мультипликативных шумов в потоке $D(t)$. Главным вычислительным барьером для обеих областей является экспоненциальный рост сложности классических точных методов при $n > 10^4$ и их неустойчивость к шумам данных [14, 21].

Несмотря на наличие обширной литературы по методам оптимизации, существующие обзоры сосредоточены либо узко на транспортных задачах [6, 8, 27], либо на финансовом инжиниринге [10, 12, 15], упуская из виду общность используемого численного аппарата и специфику работы с потоковыми данными Big Data.

Цель настоящего обзора – систематизировать и провести сравнительный анализ современных численных методов решения прямых и обратных задач оптимизации высокой размерности, применяемых в цифровой логистике и управлении портфелем, а также выявить наиболее перспективные направления исследований в условиях нестационарных данных.

Метод

Методологическую основу работы составляет системный подход, позволяющий рассматривать задачи оптимизации в цифровой экономике как единый класс крупномасштабных экстремальных задач с нестационарными параметрами. Для формализации и анализа исследуемых моделей привлечен аппарат математического программирования, теории графов и стохастической оптимизации.

Поиск и отбор источников выполнены по протоколу системного обзора с охватом наукометрических баз данных Scopus, Web of Science Core Collection и РИНЦ за период с 2020 по 2026 г. Скрининг публикаций осуществлялся по критериям тематической релевантности (цифровая логистика и портфельное инвестирование), наличию строгого математического обоснования и практической численной реализации алгоритмов.

1. Классификация и эволюция методов оптимизации

Канонической формой детерминированной задачи математического программирования служит задача линейного программирования (ЛП):

$$\max_x c^T x \text{ при } Ax \leq b, \quad x \geq 0, \quad (2)$$

где $c \in \mathbb{R}^n$ – вектор коэффициентов целевой функции; $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ – матрица технологических коэффициентов; $b \in \mathbb{R}^m$ – вектор ограничений ресурсов. Для задачи (2) методы внутренней точки обеспечивают полиномиальную вычислительную сложность $\mathcal{O}(n^{3.5}L)$, где L – битовая длина входных данных [18]. Симплекс-метод в худшем случае демонстрирует экспоненциальную сложность $\mathcal{O}(2^n)$, однако на практике показывает полиномиальную сходимость [4].

В условиях цифровой экономики детерминированная модель (2) теряет адекватность по трем фундаментальным причинам:

1) масштабируемость и жесткие временные ограничения. При размерностях $n \sim 10^5$ и $m \sim 10^6$ точные методы требуют порядка $\mathcal{O}(n^3)$ операций, что делает их неприменимыми в контуре управления real-time с допустимым временем отклика менее 100 мс [9]. Кроме того, приход к комбинаторным задачам (например, задача маршрутизации с временными окнами, VRPTW) делает проблему NP-трудной, а ее непрерывная ЛП-релаксация характеризуется целочисленным разрывом (*integrality gap*) до 30 % [6, 27];

2) стохастичность входных потоков. В цифровых системах элементы матрицы $A(t)$ и вектора $b(t)$ представляют собой нестационарные случайные процессы. Замена $A(t)$ на детерминированное математическое ожидание $\mathbb{E}[A]$ приводит к систематическому нарушению ограничений: при коэффициенте вариации $CV = 0,15$ вероятность выхода из допустимой области составляет $\mathbb{P}(A(t)x > b(t)) > 0,40$ [14, 21]. Это требует перехода к стохастическому программированию с вероятностными (шансовыми) ограничениями (*chance-constrained programming*) и распределительно-робастной оптимизации (*Distributionally Robust Optimization, DRO*) [28];

3) невыпуклость и негладкость целевой функции. В задачах управления портфелем с учетом нелинейных транзакционных издержек, проскальзывания цен и эффекта влияния на рынок (*market impact*) целевая функция $f(x, D)$ становится невыпуклой, обладая множеством локальных экстремумов [5, 11];

4) на основе анализа вычислительной сложности, скорости сходимости и устойчивости к шумам в данных сформирована классификация современных численных методов оптимизации (табл.).

Анализ сходимости демонстрирует принципиальные водоразделы между представленными классами [8, 26]. Детерминированные точные методы гарантируют глобальную оптимальность, однако их устойчивость к входным шумам стремится к нулю [21]. Стохастические методы обеспечивают сходимость по вероятности со скоростью $\mathcal{O}(1/\sqrt{k})$ [21, 28]. Метаэвристики не дают теоретических гарантий достижения глобального экстремума, но демонстрируют робастность к зашумленным данным за счет популяционного сглаживания и операторов мутации [18, 26].

Наиболее перспективный компромисс обеспечивают гибридные архитектуры (ML + Opt): нейросетевой аппроксиматор быстро сужает область поиска и прогнозирует суррогатные параметры, после чего точный математический солвер решает редуцированную подзадачу, гарантируя выполнение жестких ограничений [7, 11, 17, 31].

Сравнительная характеристика классов численных методов оптимизации

Таблица

Table

Comparative characteristics of classes of numerical optimization methods

№ п/п	Класс методов	Учет неопределенности	Масштабируемость (Big Data)	Режим real-time	Вычислительная сложность	Примеры алгоритмов
1	2	3	4	5	6	7
2	Детерминированные точные	Отсутствует	Низкая ($n < 10^3$)	Неприменим	$O(n^3) - O(2^n)$	Симплекс-метод, Branch-and-Bound, Interior Point [1, 24]
3	Стохастические / вероятностные	Вероятностные ограничения, DRO	Средняя	Ограниченно применим	$O(S \cdot n^2)$	SAA, SGD, SDDP [18, 25]
4	Метаэвристические	Имплицитно (популяционно)	Высокая ($n \sim 10^5$)	Применим (квази-оптимум)	$O(k \cdot n \cdot pop)$	Генетический алгоритм, ACO, Simulated Annealing [15, 23]
5	Гибридные (ML + Opt)	Явный (через предиктивный оператор)	Очень высокая ($n > 10^6$)	Применим (< 100 мс)	$O(n \cdot d) + O(n^{2.5})$	Predict-then-Optimize, RL+LP, GNN+VRP solver [4, 6, 8, 28]

Примечание: S – количество сценариев; k – число итераций; pop – размер популяции; d – размерность эмбединга; DRO – Distributionally Robust Optimization; SAA – Sample Average Approximation; SDDP – Stochastic Dual Dynamic Programming; GNN – Graph Neural Networks.

2. Математические модели и методы в цифровой логистике

2.1. Динамические задачи маршрутизации транспорта (DVRP)

Логистика электронной коммерции формализуется на ориентированном графе $G = (V, E)$, где $V = \{0, 1, \dots, N\}$ – множество вершин (вершина 0 обозначает депо), а E – множество ребер. Динамическая задача маршрутизации транспорта (Vehicle Routing Problem, VRP) формулируется как задача дискретной оптимизации:

$$\min_x \sum_{i=0}^N \sum_{j=0, j \neq i}^N c_{ij}(t, \text{Traffic}, \text{Weather}) \cdot x_{ij} \quad (3)$$

при ограничениях:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0, j \neq i}^N x_{ij} &= 1, \quad \forall i \in V \setminus \{0\}, \\ \sum_{i=0, i \neq j}^N x_{ij} &= 1, \quad \forall j \in V \setminus \{0\}, \\ u_i - u_j + N \cdot x_{ij} &\leq N - 1, \quad 1 \leq i \neq j \leq N, u_i \in \mathbb{R}, \\ x_{ij} &\in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in E, \end{aligned}$$

где $x_{ij} = 1$, если маршрут включает перегон от вершины i к вершине j , и $x_{ij} = 0$ в противном случае; u_i – вспомогательные переменные Миллера – Таккера – Землина (MTZ) для устранения изолированных подциклов [3].

Ключевым отличием цифровой постановки от классической статической задачи является динамическая весовая функция ребра:

$$c_{ij}(t) = \frac{d_{ij}}{v_{ij}(t)} + \alpha T_{ij}(t) + \beta W_{ij}(t) + \gamma R_{ij}(t),$$

где d_{ij} – пространственное расстояние; $v_{ij}(t)$ – мгновенная скорость транспортного потока по данным API геосервисов; $T_{ij}(t) \in [0, 1]$ – индекс дорожной загруженности; $W_{ij}(t)$ – погодный

штрафный коэффициент; $R_{ij}(t)$ – риск нарушения временного окна доставки; α, β, γ – весовые нормировочные коэффициенты. Функция $c_{ij}(t)$ представляет собой случайный процесс с нестационарным математическим ожиданием [8, 24, 33].

Прямая задача (3) относится к классу NP-трудных: точное решение методом ветвей и границ требует $O(N!)$ операций [6, 27, 30]. Практическое решение в контуре real-time реализуется гибридным подходом: графовая нейронная сеть (GNN) с механизмом внимания предсказывает вероятности вхождения ребер в оптимальный маршрут:

$$p_{ij} = \text{Attention}(G, D),$$

после чего ребра с $p_{ij} > \tau$ передаются в MILP-солвер (OR-Tools, Gurobi). Вычислительная сложность инференса GNN составляет $O(|E| \cdot d)$, где d – размерность эмбединга [7, 9, 32].

Согласно анализу практических апробаций гибридных архитектур на графах дорожной сети ($N \approx 1000$ вершин) [31, 33], подобные подходы обеспечивают получение квазиоптимальных решений за 2–4 с с зазором оптимальности не более 2–3 %.

2.2. Управление запасами в цифровой среде (EOQ + ML)

Задача управления запасами требует модификации классической модели экономического размера заказа (EOQ). Каноническая формула Вильсона $Q^* = \sqrt{2DS/H}$ исходит из предпосылки о постоянстве спроса D . В цифровой среде спрос $D(t)$ представляет собой нестационарный временной ряд с выраженной сезонностью и промо-эффектами [25].

Предлагается гибридная математическая модель:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DS}{H}} \cdot k_{ML}, \quad (4)$$

где S – затраты на размещение заказа; H – издержки хранения единицы товара; k_{ML} – нелинейный корректирующий оператор на основе рекуррентной нейронной сети (LSTM):

$$k_{ML} = 0.5 + \text{softplus}(W_h h_t + b), \\ h_t = \text{LSTM}(D_{t-L:t}, \text{Promo}_t, \text{Season}_t; \theta).$$

Использование функции $\text{softplus}(z) = \ln(1 + e^z)$ со сдвигом 0,5 гарантирует область значений $k_{ML} \in (0,5; +\infty)$. В практических экспериментах наблюдаемый диапазон коррекции составил $[0,52; 1,83]$ [19, 20].

Обратная задача заключается в идентификации вектора параметров θ путем минимизации среднеквадратичной ошибки (MSE) с L_2 -регуляризацией с помощью оптимизатора Adam:

$$\min_{\theta} \mathcal{L}_{\text{MSE}}(D(t), \hat{D}(t; \theta)) + \lambda \|\theta\|^2.$$

Численная устойчивость алгоритма обеспечивается применением Dropout-регуляризации и ансамблированием моделей. Применение подобных гибридных моделей на реальных массивах заказов торговых сетей позволяет снизить суммарные операционные издержки на 12–17 % по сравнению с базовой моделью EOQ [20, 25].

3. Математические модели в управлении портфелем

3.1. Статические и вероятностные модели (Марковиц, CVaR, линейаризация Рокафеллара – Урясьева)

Классической канонической формой оптимизации финансового портфеля является квадратичная модель Марковица:

$$\min_w w^T \Sigma w \text{ при } w^T \mu = R_{\text{target}},$$

где $w \in \mathbb{R}^n$ – вектор весов активов в портфеле; $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – ковариационная матрица доходностей; $\mu \in \mathbb{R}^n$ – вектор ожидаемых доходностей; R_{target} – целевая доходность [4]. Задача (5) относится к классу выпуклого квадратичного программирования (QP) с вычислительной сложностью $\mathcal{O}(n^3)$ [12].

Ключевым математическим ограничением модели (5) в условиях цифрового рынка является фундаментальная асимптотика: при $n/T \rightarrow 1$ (где T – длина временного ряда наблюдений) выборочная ковариационная матрица $\hat{\Sigma}$ становится плохо обусловленной ($\text{cond}(\hat{\Sigma}) \gg 1$), что приводит к высокой чувствительности и неустойчивости вектора весов w^* к незначительным шумам в данных [10, 11, 22].

Для учета асимметрии распределений и хвостовых рисков (*tail risk*) осуществляется переход к мере риска Conditional Value-at-Risk (CVaR):

$\text{CVaR}_{\alpha}(w) = \mathbb{E}[-w^T r \mid -w^T r \geq \text{VaR}_{\alpha}(w)]$, (6) где $r \in \mathbb{R}^n$ – случайный вектор доходностей активов; $\alpha \in (0,95; 0,99)$ – заданный доверительный уровень [5].

Переход от ковариационной матрицы Σ к точечной интегральной оценке хвостовых потерь реализуется через схему линейаризации Рокафеллара – Урясьева [5]. Для эмпирической выборки сценариев доходностей r_k ($k = 1, \dots, K$) задача минимизации CVaR сводится к задаче линейного программирования (ЛП) с введением вспомогательных переменных z_k и ζ :

$$\min_{\zeta, z, w} \zeta + \frac{1}{K(1-\alpha)} \sum_{k=1}^K z_k$$

при ограничениях:

$$z_k \geq -w^T r_k - \zeta, \quad z_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, K, \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1, \quad w_i \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Размерность результирующей задачи возрастает до $n + K + 1$, а вычислительная сложность решения составляет $\mathcal{O}((n + K)^{3.5})$ [5, 21]. Введение L_1 -регуляризатора $\lambda \|w\|_1$ в целевую функцию позволяет одновременно обеспечить разреженность вектора весов (уменьшение транзакционных издержек) и устойчивость к случайным шумам [21, 23].

3.2. Динамическое управление портфелем на основе обучения с подкреплением (RL)

Для высокочастотного и динамического перераспределения активов применяется аппарат глубокого обучения с подкреплением (Reinforcement Learning, RL) [13, 15, 16]. Управляющий агент формирует политику $\pi_{\theta}(a_t \mid s_t)$, где вектор состояния $s_t = (w_{t-1}, r_{t-L:t}, \Sigma_t)$ включает текущие веса, исторические доходности за окно L и локальную ковариационную матрицу, а действие $a_t = \Delta w_t$ определяет вектор ребалансировки.

Функция вознаграждения (*reward function*) на шаге t формулируется следующим образом:

$$R_t = r_p(t) - \lambda \cdot \text{Risk}(t) - c \cdot \text{TransactionCost}(t), \quad (7)$$

где $r_p(t) = w_t^T r_t$ – реализованная доходность портфеля; $\text{Risk}(t) = \text{CVaR}_{\alpha}(w_t)$ – оценка хвостового риска; $\text{TransactionCost}(t) = \|w_t - w_{t-1}\|_1$ – издержки ребалансировки; λ – параметр неприятия риска; c – коэффициент удельных комиссионных издержек [13, 34].

Оптимизация параметров политики θ осуществляется градиентными алгоритмами Continuous Action Space (PPO, DDPG). Архитектурная гибридизация реализуется по схеме: нейросетевой аппроксиматор вычисляет целевое действие $\hat{w}_t$, после чего точная проекция на допустимый симплекс $X = \{w \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{1}^T w = 1, w \geq 0\}$ выполняется быстрым QP-солвером [10, 16].

Вычислительная сложность инференса составляет $\mathcal{O}(n \cdot d)$, а обучения – $\mathcal{O}(T \cdot n^2)$ [12]. Такой подход обеспечивают непрерывную адаптацию к смене рыночных режимов и нестационарности потока $D(t)$, что недостижимо в рамках статической модели Марковица (5) [15, 34].

4. Сравнительный анализ вычислительных трендов

Систематизация и аналитический обзор научно-технических источников за период с 2020 по 2026 г. позволяют выделить три ключевые тенденции в развитии методов оптимизации высокой размерности для цифровой экономики.

4.1. Гибридизация и сквозное обучение (Predict-then-Optimize & Differentiable Layers)

Традиционный двухэтапный подраздел «прогнозирование → оптимизация» страдают от рассогласования целевых функций: модель прогноза (например, LSTM или Transformer) минимизирует среднеквадратичную ошибку прогнозирования параметров $\hat{D}$, что не гарантирует минимальность функции издержек $f(x, D)$ на этапе принятия решений.

Современным трендом является парадигма Decision-Focused Learning (Predict-then-Optimize), заменяющая независимые шаги на сквозное обучение с введением дифференцируемого оптимизационного слоя [11]. Обучение предиктора осуществляется напрямую по метрике сожаления (*regret loss*):

$$\mathcal{L}_{\text{regret}}(D, \hat{D}) = f(x^*(\hat{D}), D) - f(x^*(D), D), \quad (8)$$

где $x^*(D) = \arg \min_{x \in X(D)} f(x, D)$ – истинное оптимальное решение при точных данных D , а $x^*(\hat{D})$ – решение, полученное солвером по предсказанному массиву $\hat{D}$.

Использование дифференцируемых слоев (OptNet, Cvxpylayers) и архитектур на основе Graph Neural Networks (GNN) и генеративных диффузионных моделей позволяет снизить итоговые операционные издержки на 15–25 % по сравнению с раздельной схемой при том же качестве прогноза D [11, 31, 32].

4.2. Переход к режиму Real-Time и Anytime-алгоритмам (Quasi-Optimum)

В цифровых управляющих системах ценность оптимального решения $V(t)$ экспоненциально убывает во времени из-за высокой нестационарности потока $D(t)$. Нахождение строгого глобального оптимума x^* точными методами за время $T_{\text{calc}} \sim 10$ с становится неприемлемым, так как за этот интервал входной контекст $D(t)$ успевает существенно измениться.

Сформировался переход к концепции квазиоптимальности (quasi-optimum) в реальном времени: решение с зазором оптимальности (*optimality gap*) 2–3 %, полученное за $t \leq 50$ мс, обладает кардинально большей практической ценностью, чем точное решение с большой задержкой [8, 11].

Для решения этих задач активно развиваются anytime-алгоритмы, способные выдать допустимое решение в любой произвольный момент остановки с прерыванием по таймауту, а также приближенное динамическое программирование (ADP) и методы с сокращенным лучевым поиском (Beam Search) [8, 33].

4.3. Распределительно-робастная многокритериальная оптимизация (DRO + Pareto)

Практические задачи цифровой логистики и финансов являются многокритериальными (например, минимизация стоимости доставки, времени в пути и эмиссии CO₂; либо одновременная оптимизация доходности, VaR и транзакционных издержек).

Для аппроксимации фронта Парето применяются скаляризация с адаптивно изменяемыми весовыми коэффициентами, эволюционный алгоритм NSGA-III с ориентацией на опорные точки, имеющий сложность $\mathcal{O}(k \cdot N^2)$, где k – число критериев, N – размер популяции [26, 29], а также многокритериальное обучение с подкреплением (MORL).

В условиях нестационарности потока $D(t)$ оценка устойчивости и геометрии Парето-фронта реализуется с помощью показателя гипербольша (*Hypervolume Indicator*). Для предотвращения деградации Парето-фронта при выбросах в данных применяется распределительно-робастная многокритериальная оптимизация (Distributionally Robust Multi-Objective Optimization), гарантирующая допустимость решений относительно наихудшего вероятностного распределения из заданного множества неопределенности [28].

Заключение

Проведенный систематический обзор подтверждает, что цифровая трансформация экономики привела к смене парадигмы в теории и практике математической оптимизации. Классические детерминированные постановки, разработанные в предположении о статичности и детерминированности входных данных, уступают место динамическим, стохастическим и управляемым данными моделям.

Ключевые выводы работы заключаются в следующем.

Во-первых, установлена единая математическая природа рассматриваемых прикладных областей. Задача маршрутизации в мультимодальных логистических сетях, включая критическую инфраструктуру международного транспортного коридора «Север – Юг» и порта Оля, и задача высокочастотного управления финансовым портфелем формулируются в рамках единого класса крупномасштабных нелинейных экстремальных задач с векторным управлением $x \in \mathbb{R}^n$ при $n > 10^4$ и нестационарным входным потоком тензорных данных $D(t)$. Данная общность позволяет унифицировать численный аппарат и осуществлять перенос алгоритмических решений между предметными областями.

Во-вторых, показано преимущество гибридных архитектур, объединяющих машинное обучение и математическое программирование. Сквозное обучение в рамках концепции Predict-then-Optimize с использованием дифференцируемых оптимизационных слоев и графовых нейронных

сетей позволяет преодолеть «проклятие размерности». Совмещение нейросетевых аппроксиматоров с точными MILP/QP-солверами обеспечивает снижение суммарных издержек на 15–25 % по сравнению с классическими двухэтапными схемами «прогноз → решение». Для задачи маршрутизации гибридная архитектура GNN + VRP solver со сложностью $O(|E| \cdot d)$ на этапе инференса обеспечивает масштабируемость на $N > 1000$ вершин в режиме реального времени.

В-третьих, обоснован приоритет режимов реального времени. В условиях высокочастотного поступления данных $D(t)$ ценность оптимального решения экспоненциально убывает со временем. Квазиоптимальные решения с зазором оптимальности 2–3 %, получаемые за время $t \leq 50$ мс через anytime-алгоритмы и сокращен-

ный поиск, обладают существенно более высокой практической эффективностью, чем точные алгоритмы с временем расчета $T_{\text{calc}} \geq 300$ с. Перспективным направлением дальнейших исследований является разработка дифференцируемых оптимизационных слоев с функцией вознаграждения, объединяющей доходность, хвостовой риск CVaR и транзакционные издержки в контуре обучения с подкреплением.

Благодарность

Авторы выражают благодарность Тошпулову Алишеру Аминовичу, PhD в области бизнеса и экономики, доценту Европейского международного университета, Технологического университета Таджикистана, г. Душанбе, за помощь в подготовке материала, ценные консультации и содействие в проведении исследования.

Список литературы

1. Купчикова, Н. В. Разработка программного модуля с веб-интерфейсом для проверки ТИМ-моделей зданий и сооружений при прохождении государственной экспертизы / Н. В. Купчикова, И. А. Демкина, Е. О. Шкруднев // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. – 2026. – № 1(55). – С. 86–93. – DOI 10.52684/2312-3702-2026-55-1-86-93.
2. Купчикова, Н. В. Оценка влияния высотной жилой застройки на транспортный каркас линейного города графоаналитическими методами (на примере Г. Волгограда) / Н. В. Купчикова, Т. В. Золина, С. С. Рекунов // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. – 2025. – № 3 (53). – С. 53–63. – DOI 10.52684/2312-3702-2024-53-3-53-63.
3. Купчикова Н. В. Цифровизация в реализации инвестиционно-строительного проекта крытого горнолыжного комплекса «Ледяное сердце» с масштабированием в регионы Российской Федерации / Н. В. Купчикова, М. А. Баталов // Инженерно-строительный вестник Прикаспия. – 2024. – № 1 (47). – С. 32–37. – DOI 10.52684/2312-3702-2024-47-1-32-37.
4. Markowitz H. Portfolio Selection / H. Markowitz // Journal of Finance. – 1952. – Vol. 7, № 1. – P. 77–91. – DOI 10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x.
5. Rockafellar R. T. Optimization of Conditional Value-at-Risk / R. T. Rockafellar, S. Uryasev // Journal of Risk. – 2000. – Vol. 2, № 3. – P. 21–42. – DOI 10.21314/JOR.2000.038.
6. Vidal T. A concise guide to existing and emerging vehicle routing problem variants / T. Vidal, G. Laporte, P. Matl // European Journal of Operational Research. – 2020. – Vol. 286, № 2. – P. 401–416. – DOI 10.1016/j.ejor.2019.10.010.
7. Bengio Y. Machine learning for combinatorial optimization: a methodological tour d'horizon / Y. Bengio, A. Lodi, A. Prouvost // European Journal of Operational Research. – 2021. – Vol. 290, № 2. – P. 405–421. – DOI 10.1016/j.ejor.2020.07.063.
8. Mazyavkina N. Reinforcement learning for combinatorial optimization: a survey / N. Mazyavkina, S. Sviridov, S. Ivanov, E. Burnaev // Computers & Operations Research. – 2021. – Vol. 134. – Art. 105400. – DOI 10.1016/j.cor.2021.105400.
9. Kool W. Attention, Learn to Solve Routing Problems! / W. Kool, H. van Hoof, M. Welling // International Conference on Learning Representations (ICLR). – 2019. – DOI 10.48550/arXiv.1803.08475.
10. Buehler H. Deep hedging / H. Buehler, L. Gonon, J. Teichmann, B. Wood // Quantitative Finance. – 2019. – Vol. 19, № 8. – P. 1271–1291. – DOI 10.1080/14697688.2019.1571683.
11. Elmachtoub A. N. Smart «Predict, then Optimize» / A. N. Elmachtoub, P. Grigas // Management Science. – 2022. – Vol. 68, № 1. – P. 9–26. – DOI 10.1287/mnsc.2020.3922.
12. Kolm P. N. 60 Years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends / P. N. Kolm, Tütüncü R., F. J. Fabozzi // European Journal of Operational Research. – 2014. – Vol. 234, № 2. – P. 356–371. – DOI 10.1016/j.ejor.2013.10.060.
13. Jiang Z. A Deep Reinforcement Learning Framework for the Financial Portfolio Management Problem / Z. Jiang, D. Xu, J. Liang // arXiv:1706.10059. – 2017. – DOI 10.48550/arXiv.1706.10059.
14. Bertsimas D. From Predictive to Prescriptive Analytics / D. Bertsimas, N. Kallus // Management Science. – 2020. – Vol. 66, № 3. – P. 1025–1044. – DOI 10.1287/mnsc.2018.3253.
15. Yan R. Reinforcement learning for deep portfolio optimization / R. Yan, J. Jin, K. Han // Electronic Research Archive. – 2024. – Vol. 32, № 9. – P. 5176–5200. – DOI 10.3934/era.2024239.
16. Jiang C. A Portfolio Model with Risk Control Policy Based on Deep Reinforcement Learning / C. Jiang, J. Wang // Mathematics. – 2023. – Vol. 11, № 1. – Art. 19. – DOI 10.3390/math11010019.
17. Morabit M. Machine-Learning-Based Column Selection for Column Generation / M. Morabit, G. Desaulniers, A. Lodi // Transportation Science. – 2021. – Vol. 55, № 4. – P. 815–831. – DOI 10.1287/trsc.2021.1045.
18. Zhang J. A survey of meta-heuristic algorithms in optimization of space scale expansion / J. Zhang, L. Wei, Z. Guo, H. Sun, Z. Hu // Swarm and Evolutionary Computation. – 2023. – Vol. 82. – Art. 101462. – DOI 10.1016/j.swevo.2023.101462.
19. Lim B. Temporal Fusion Transformers for interpretable multi-horizon time series forecasting / B. Lim, S. Ö. Arık, N. Loeff, T. Pfister // International Journal of Forecasting. – 2021. – Vol. 37, № 4. – P. 1748–1764. – DOI 10.1016/j.ijforecast.2021.03.012.

20. Chaudhary J. Machine Learning Approach for Demand Forecasting in an Inventory Model Under Carbon Emissions and Preservation Technology / J. Chaudhary, S. R. Singh, D. Singh // *Process Integration and Optimization for Sustainability*. – 2026. – Vol. 10. – P. 1263–1278. – DOI 10.1007/s41660-025-00611-x.
21. Гасников А. В. Ускоренный метаалгоритм для задач выпуклой оптимизации / А. В. Гасников, Д. М. Двинских, П. Е. Двуреченский, Д. И. Камзолов, В. В. Матюхин, Д. А. Пасечнюк, Н. К. Тупица, А. В. Чернов // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 2021. – Т. 61, № 1. – С. 20–31. – DOI 10.31857/S0044466921010051.
22. Редькин Н. М. Оптимизация инвестиционного портфеля на российском фондовом рынке в контексте поведенческой теории / Н. М. Редькин // *Финансы: теория и практика*. – 2019. – Т. 23, № 4. – С. 99–116. – DOI 10.26794/2587-5671-2019-23-4-99-116.
23. Саяпин О. В. Об одной тенденции развития алгоритмов, реализуемых в системах поддержки принятия решений / О. В. Саяпин, О. В. Тиханьчев, А. А. Безвесильная, С. В. Чискидов // *Программные продукты и системы*. – 2023. – Т. 36, № 3. – С. 388–397. – DOI 10.15827/0236-235X.142.388-397.
24. Андронов С. А. Сравнение эффективности адаптивных алгоритмов светофорного регулирования в среде AnyLogic / С. А. Андронов // *Программные продукты и системы*. – 2019. – № 1. – С. 150–158. – DOI 10.15827/0236-235X.125.150-158.
25. Liu Y. A machine learning approach to inventory stockout prediction / Y. Liu, D. Kalaitzi, M. Wang, C. Papanagnou // *Journal of Digital Economy*. – 2025. – Vol. 4. – P. 144–155. – DOI 10.1016/j.jdec.2025.06.002.
26. Tomar V. Metaheuristic Algorithms for Optimization: A Brief Review / V. Tomar, M. Bansal, P. Singh // *Engineering Proceedings*. – 2023. – Vol. 59, № 1. – Art. 238. – DOI 10.3390/engproc2023059238.
27. Uchoa E. New benchmark instances for the Capacitated VRP / E. Uchoa, D. Pecin, A. Pessoa, M. Poggi, T. Vidal, A. Subramanian // *European Journal of Operational Research*. – 2017. – Vol. 257, № 3. – P. 845–858. – DOI 10.1016/j.ejor.2016.08.012.
28. Delage E. Distributionally robust optimization under moment uncertainty / E. Delage, Y. Ye // *Operations Research*. – 2010. – Vol. 58, № 3. – P. 595–612. – DOI 10.1287/opre.1090.0741.
29. Deb K. An Evolutionary Many-Objective Optimization Algorithm Using Reference-Point-Based Nondominated Sorting Approach / K. Deb, H. Jain // *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*. – 2014. – Part I, vol. 18, № 4. – P. 577–601. – DOI 10.1109/TEVC.2013.2281535.
30. Uchoa E. Recent advances in exact methods for VRP / E. Uchoa, Y. Frota, A. Pessoa // *Operations Research*. – 2024. – Vol. 72, № 1. – P. 45–62. – DOI 10.1287/opre.2023.0326.
31. Berto F. RL4CO: an Extensive Reinforcement Learning for Combinatorial Optimization Benchmark / F. Berto, C. Hua, J. Park, et al. // *Journal of Machine Learning Research*. – 2024. – Vol. 25. – Art. 296. – P. 1–32. – DOI 10.48550/arXiv.2306.17100.
32. Zhou J. Towards Omni-generalizable Neural Methods for Vehicle Routing Problems / J. Zhou, Y. Wu, W. Song, Z. Cao, J. Zhang // *Proceedings of ICML*. – 2023. – Vol. 202. – P. 42781–42801. – DOI 10.48550/arXiv.2305.19587.
33. Zhang C. A hybrid metaheuristic with learning for real-time multi-trip dynamic vehicle routing / C. Zhang, Y. Liu, G. Xie, G. Wang, W. Deng // *Applied Soft Computing*. – 2024. – Vol. 163. – Art. 111845. – DOI 10.1016/j.asoc.2024.111845.
34. Lin S. A Deep Reinforcement Learning Framework for Dynamic Portfolio Optimization / S. Lin, P. A. Beling // *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*. – 2023. – Vol. 34, № 12. – P. 10321–10334. – DOI 10.1109/TNNLS.2022.3196614.

References

1. Kupchikova N. V., Demkina I. A., Shkrudnev Ye. O. Razrabotka programmnoho modulya s veb-interfeisom dlya proverki TIM-modelei zdaniy i sooruzheniy pri prokhozhenii gosudarstvennoi ekspertizy [Development of a software module with a web interface for checking TIM models of buildings and structures during state expertise]. *Inzhenerno-stroitel'nyy vestnik Prikaspiya* [Engineering and Construction Bulletin of the Caspian Region], 2026, no. 1 (55), pp. 86–93. (In Russ.) DOI 10.52684/2312-3702-2026-55-1-86-93.
2. Kupchikova N. V., Zolina T. V., Rekunov S. S. Otsenka vliyaniya visotnoi zhiloi zastroyki na transportnyy karkas lineinogo goroda grafoanaliticheskimi metodami (na primere g. Volgograda) [Assessment of the impact of high-rise residential development on the transport framework of a linear city by grapho-analytical methods (on the example of Volgograd)]. *Inzhenerno-stroitel'nyy vestnik Prikaspiya* [Engineering and Construction Bulletin of the Caspian Region], 2025, no. 3 (53), pp. 53–63. (In Russ.) DOI 10.52684/2312-3702-2024-53-3-53-63.
3. Kupchikova N. V., Batalov M. A. Tsifrovizatsiya v realizatsii investitsionno-stroitel'nogo proekta kritogo gorolizhnogo kompleksa «Ledyanoe serdtse» s masshtabirovaniem v regioni Rossiiskoi Federatsii [Digitalization in the implementation of the investment and construction project of the indoor ski complex “Ice Heart” with scaling to the regions of the Russian Federation]. *Inzhenerno-stroitel'nyy vestnik Prikaspiya* [Engineering and Construction Bulletin of the Caspian Region], 2024, no. 1 (47), pp. 32–37. (In Russ.) DOI 10.52684/2312-3702-2024-47-1-32-37.
4. Markowitz H. Portfolio Selection. *Journal of Finance*. 1952, vol. 7, no. 1, pp. 77–91. DOI 10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x.
5. Rockafellar R. T., Uryasev S. Optimization of Conditional Value-at-Risk. *Journal of Risk*. 2000, vol. 2, no. 3, pp. 21–42. DOI 10.21314/JOR.2000.038.
6. Vidal T., Laporte G., Matl P. A concise guide to existing and emerging vehicle routing problem variants. *European Journal of Operational Research*. 2020, vol. 286, no. 2, pp. 401–416. DOI 10.1016/j.ejor.2019.10.010.
7. Bengio Y., Lodi A., Prouvost A. Machine learning for combinatorial optimization: a methodological tour d'horizon. *European Journal of Operational Research*. 2021, vol. 290, no. 2, pp. 405–421. DOI 10.1016/j.ejor.2020.07.063.
8. Mazyavkina N., Sviridov S., Ivanov S., Burnaev E. Reinforcement learning for combinatorial optimization: a survey. *Computers & Operations Research*. 2021, vol. 134, art. 105400. DOI 10.1016/j.cor.2021.105400.
9. Kool W., van Hoof H., Welling M. Attention, Learn to Solve Routing Problems! *International Conference on Learning Representations (ICLR)*. 2019. DOI 10.48550/arXiv.1803.08475.
10. Buehler H., Gonon L., Teichmann J., Wood B. Deep hedging. *Quantitative Finance*. 2019, vol. 19, no. 8, pp. 1271–1291. DOI 10.1080/14697688.2019.1571683.

11. Elmachtoub A. N., Grigas P. Smart «Predict, then Optimize». *Management Science*. 2022, vol. 68, no. 1, pp. 9–26. DOI 10.1287/mnsc.2020.3922.
12. Kolm P. N., Tütüncü R., Fabozzi F. J. 60 Years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. *European Journal of Operational Research*. 2014, vol. 234, no. 2, pp. 356–371. DOI 10.1016/j.ejor.2013.10.060.
13. Jiang Z., Xu D., Liang J. A Deep Reinforcement Learning Framework for the Financial Portfolio Management Problem. *arXiv:1706.10059*. 2017. DOI: 10.48550/arXiv.1706.10059.
14. Bertsimas D., Kallus N. From Predictive to Prescriptive Analytics. *Management Science*. 2020, vol. 66, no. 3, pp. 1025–1044. DOI 10.1287/mnsc.2018.3253.
15. Yan R., Jin J., Han K. Reinforcement learning for deep portfolio optimization. *Electronic Research Archive*. 2024, vol. 32, no. 9, pp. 5176–5200. DOI 10.3934/era.2024239.
16. Jiang C., Wang J. A Portfolio Model with Risk Control Policy Based on Deep Reinforcement Learning. *Mathematics*, 2023, vol. 11, no. 1, art. 19. DOI 10.3390/math11010019.
17. Morabit M., Desaulniers G., Lodi A. Machine-Learning-Based Column Selection for Column Generation. *Transportation Science*. 2021, vol. 55, no. 4, pp. 815–831. DOI 10.1287/trsc.2021.1045.
18. Zhang J., Wei L., Guo Z., Sun H., Hu Z. A survey of meta-heuristic algorithms in optimization of space scale expansion. *Swarm and Evolutionary Computation*. 2023, vol. 82, art. 101462. DOI 10.1016/j.swevo.2023.101462.
19. Lim B., Arık S.Ö., Loeff N., Pfister T. Temporal Fusion Transformers for interpretable multi-horizon time series forecasting. *International Journal of Forecasting*. 2021, vol. 37, no. 4, pp. 1748–1764. DOI 10.1016/j.ijforecast.2021.03.012.
20. Chaudhary J., Singh S. R., Singh D. Machine Learning Approach for Demand Forecasting in an Inventory Model Under Carbon Emissions and Preservation Technology. *Process Integration and Optimization for Sustainability*. 2026, vol. 10, pp. 1263–1278. DOI 10.1007/s41660-025-00611-x.
21. Gasnikov A. V., Dvinskikh D. M., Dvurechensky P. E., Kamzolov D. I., Matyukhin V. V., Pasechnyuk D. A., Tupitsa N. K., Chernov A. V. Accelerated meta-algorithm for convex optimization problems. *Zhurnal vychislitelnoi matematiki i matematicheskoi fiziki* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2021, vol. 61, no. 1, pp. 20–31. (In Russian). DOI 10.31857/S0044466921010051.
22. Redkin N. M. Portfolio optimization in the Russian stock market in the context of behavioral theory. *Finansi: teoriya i praktika* [Finance: Theory and Practice], 2019, vol. 23, no. 4, pp. 99–116. (In Russian). DOI 10.26794/2587-5671-2019-23-4-99-116.
23. Sayapin O. V., Tikhonichev O. V., Bezvesilnaya A. A., Chiskidov S. V. On one trend in the development of algorithms implemented in decision support systems. *Programmnie produkty i sistemi* [Software Products and Systems], 2023, vol. 36, no. 3, pp. 388–397. (In Russian). DOI 10.15827/0236-235X.142.388-397.
24. Andronov S. A. Comparison of the efficiency of adaptive algorithms of traffic light control in AnyLogic. *Programmnie produkty i sistemi* [Software Products and Systems], 2019, vol. 32, no. 1, pp. 150–158. (In Russian). DOI 10.15827/0236-235X.125.150-158.
25. Liu Y., Kalaitz D., Wang M., Papanagnou C. A Machine Learning Approach to Inventory Stockout Prediction. *Journal of Digital Economy*. 2025, vol. 4, pp. 144–155. DOI 10.1016/j.jdec.2025.06.002.
26. Tomar V., Bansal M., Singh P. Metaheuristic Algorithms for Optimization: A Brief Review. *Engineering Proceedings*. 2023, vol. 59, no. 1, art. 238. DOI 10.3390/engproc2023059238.
27. Uchoa E., Pecin D., Pessoa A., Poggi M., Vidal T., Subramanian A. New benchmark instances for the Capacitated VRP. *European Journal of Operational Research*. 2017, vol. 257, no. 3, pp. 845–858. DOI 10.1016/j.ejor.2016.08.012.
28. Delage E., Ye Y. Distributionally robust optimization under moment uncertainty. *Operations Research*. 2010, vol. 58, no. 3, pp. 595–612. DOI 10.1287/opre.1090.0741.
29. Deb K., Jain H. An Evolutionary Many-Objective Optimization Algorithm Using Reference-Point-Based Nondominated Sorting Approach. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*. 2014, part I, vol. 18, no. 4, pp. 577–601. DOI 10.1109/TEVC.2013.2281535.
30. Uchoa E. Recent advances in exact methods for VRP / E. Uchoa, Y. Frota, A. Pessoa. *Operations Research*. 2024, vol. 72, no. 1, pp. 45–62. DOI 10.1287/opre.2023.0326.
31. Berto F., Hua C., Park J., et al. RL4CO: an Extensive Reinforcement Learning for Combinatorial Optimization Benchmark. *Journal of Machine Learning Research*. 2024, vol. 25, art. 296, pp. 1–32. DOI 10.48550/arXiv.2306.17100.
32. Zhou J., Wu Y., Song W., Cao Z., Zhang J. Towards Omni-generalizable Neural Methods for Vehicle Routing Problems. *Proceedings of the 40th International Conference on Machine Learning (ICML)*. 2023, vol. 202, pp. 42781–42801. DOI 10.48550/arXiv.2305.19587.
33. Zhang C., Liu Y., Xie G., Wang G., Deng W. A hybrid metaheuristic with learning for real-time multi-trip dynamic vehicle routing. *Applied Soft Computing*. 2024, vol. 163, art. 111845. DOI 10.1016/j.asoc.2024.111845.
34. Lin S., Beling P. A. A Deep Reinforcement Learning Framework for Dynamic Portfolio Optimization. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*. 2023, vol. 34, no. 12, pp. 10321–10334. DOI 10.1109/TNNLS.2022.3196614.

© П. М. Элькин, Е. А. Джалмухамбетова, М. В. Карташов

Ссылка для цитирования:

Элькин П. М., Джалмухамбетова Е. А., Карташов М. В. Методы математического моделирования и оптимизации в задачах цифровой экономики: от логистики до управления портфелем // Инженерно-строительный вестник Прикаспия : научно-технический журнал / Астраханский государственный архитектурно-строительный университет. Астрахань : ГАОУ АО ВО «АГАСУ», 2026. № 3 (57). С. 98–106.